

УДК 539.4

Г.М. Улітін¹, д-р техн. наук
С.М. Царенко¹, канд. техн. наук

¹ГВУЗ «Донецкий национальный технический университет»,
вул. Артема, 58, м. Донецьк, Україна, 83001. E-mail: tzarenko@rambler.ru

УДАР КОНІЧНОГО СТРИЖНЯ ОБ ЖОРСТКУ ПЕРЕШКОДУ

В статті розглянуто задачу про повздовжній удар конічного стрижня змінного перерізу. На підставі аналізу впливу параметрів конструкції на значення головної частоти коливань, надані рекомендації про використання наближеного методу розрахунку. Отримані залежності для визначення переміщень і напружень перерізів стрижня. Запропонована інженерна залежність для визначення максимальної величини зусилля в ударному перерізі.

Ключові слова: конічний стрижень, метод Фур'є, повздовжні коливання, повздовжній удар, механічні напруження.

Силові імпульсні системи широко використовуються в машинах, що виконують різноманітні технологічні процеси: штампування, кування, руйнування гірських порід, бетонних покриттів, занурення паль і так далі. Проблема підвищення продуктивності машин ударної дії розв'язується не тільки за рахунок збільшення потужності, а також за рахунок підвищення ефективності передачі енергії в середу, що обробляється. Останнє досягається, в тому числі, на підставі вивчення процесу формування хвиль деформацій бойками різної геометрії та пошуку конструкцій бойків, що створюють хвилі деформацій з раціональними параметрами [1].

При розгляданні різних моделей повздовжнього співударяння тіл [1, 2] за основу приймається хвильова модель удару Сен-Венана, так як вона найбільш повно відображає реальні динамічні процеси в тілах, що співударяються, а для її практичної реалізації використовують метод Даламбера. Точне розв'язання хвильової моделі дає метод Фур'є [3], деякі окремі випадки динамічного розрахунку з використанням цього методу для стрижнів сталого перерізу розглянуті в роботах [4, 5].

При розв'язанні рівняння поздовжніх коливань стрижнів змінного перерізу, у випадку удару, виникають певні труднощі математичного характеру як, наприклад, отримане рівняння є рівнянням зі змінними коефіцієнтами, ортогональність власних функцій та інше. Тому для спрощення розв'язання таких задач використовують різні гіпотези. Так в роботі [6] системи з розподіленими параметрами замінюються на одномасову (теорія Кокса) або різні її уточнення [7], або використовується апроксимація динамічних форм деформацій статичними [8, 9]. У роботах [2, 10, 11] розглянуто моделі повздовжнього удару стрижнів різної конфігурації з вико-

ристанням апроксимації їх поверхні послідовно сполученими циліндричними ділянками.

Метою цієї роботи є:

- отримання розрахункових залежностей для дослідження напружено-деформованого стану стрижня змінного перерізу, що виникає під час удару;

- дослідження впливу геометричних параметрів стрижня на напружено-деформований стан на основі аналізу зміни першої частоти власних коливань;

- обґрунтування інженерних залежностей для визначення розрахункових параметрів.

В якості математичної моделі об'єкта, що розглядається, візьмемо пружний стрижень конічної форми довжиною l (рис. 1). Для дослідження повздовжніх коливань $u(x, t)$, якщо вибрати систему координат з боку меншої основи, потрібно розв'язати задачу

$$E \frac{\partial}{\partial x} \left(F(x) \frac{\partial u}{\partial x} \right) = \gamma F(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}; \quad (1)$$

$$u(0, t) = 0; \quad (2)$$

$$u'_x(l, t) = 0 \quad (3)$$

з початковими умовами

$$u(x, 0) = 0; \quad \dot{u}(x, 0) = -v_0 e(x), \quad (4)$$

де E – модуль пружності, $F(x)$ – площа поперечного перерізу стрижня, γ – густина матеріалу, v_0 – швидкість удару, $e(x)$ – одинична функція.

Для перерізу стрижня (усічена піраміда або конус) $F(x) = (ax + b)^2$, де коефіцієнти a та b визначаються геометрією перерізу, наприклад для суцільного усіченого конусу $a = \frac{D-d}{l} \sqrt{\pi/4}$, $b = d \sqrt{\pi/4}$, де D , d – діаметри більшої та меншої основ відповідно.

Спочатку розглянемо випадок вільних коливань і для рівняння (1) використаємо заміну $z = \frac{ax+b}{al}$. Тоді воно прийме вигляд

$$z^2 \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + 2z \frac{\partial u}{\partial z} = \tilde{\gamma} z^2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad (5)$$

де $\tilde{\gamma} = \gamma l^2 / E$.

З першої початкової умови (4) одержимо

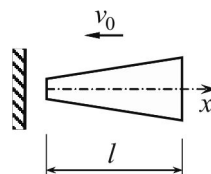


Рис. 1. Удар конічного стрижня об жорстку перешкоду

$$u(z, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n Z_n(z) \sin \omega_n t, \quad (6)$$

де $u(z, t)$ – переміщення, викликані повідомленням швидкості v_0 , A_n – довільні сталі, $Z_n(z)$ – власні функції відповідних граничних задач, ω_n – частоти власних коливань.

Диференціальний оператор рівняння (1) є самоспряженим, отже, функції $Z_n(z)$ будуть ортогональні з вагою $\rho(z) = z^2$ на відрізку $[z_1; z_2]$ [12], де $z_1 = k$; $z_2 = 1+k$, $k = b/(al)$, наприклад для стрижня в формі усіченого конусу k можна визначити з співвідношення $\frac{d}{D} = \frac{k}{k+1}$.

Для визначення власних функцій задачі (5) отримуємо рівняння

$$zZ_n'' + 2Z_n' + \lambda_n^2 z Z_n = 0, \quad (7)$$

де $\lambda_n = \omega_n \sqrt{\gamma}$ – власні значення.

Загальний розв'язок рівняння (7) має вигляд

$$Z_n(z) = C_1 \frac{\sin \lambda_n z}{z} + C_2 \frac{\cos \lambda_n z}{z}. \quad (8)$$

Якщо задовольнити крайовим умовам (2) і (3), то з урахуванням виразу для власних функцій (8) отримаємо рівняння для знаходження власних значень

$$\tan \lambda_n (z_2 - z_1) = \lambda_n z_2. \quad (9)$$

Тоді власні функції можна представити у вигляді

$$Z_n(z) = C_1 \left(\frac{\sin \lambda_n z}{z} - \tan \lambda_n z_2 \frac{\cos \lambda_n z}{z} \right) = C_1 \frac{\sin \lambda_n (z - z_1)}{z \cos \lambda_n z_1}. \quad (10)$$

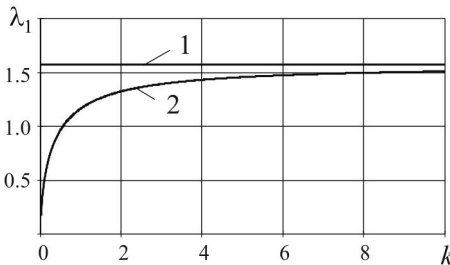


Рис. 2. Залежність λ_1 від значення параметра

відносного поперечного розміру k :

1 - для стрижня змінного перерізу;

2 - для стрижня сталого перерізу ($\lambda_1 = 1,571$)

Розглянемо вплив параметра k на значення першого власного числа частотного рівняння (9) λ_1 (першої власної частоти $\omega_1 = \lambda_1 / \sqrt{\gamma}$).

На графіку рис. 2 показана залежність λ_1 від величини параметра відносного поперечного розміру k , на графіку бачимо, що при значенні $k > 8$, що відповідає співвідношенню розмірів більшої та меншої основи

менш, ніж 9:8, значення першої власної частоти буде відрізнятися від частоти, отриманої для моделі стрижня сталого перерізу [3], не більше ніж на 5%. Враховуючи, що k залежить тільки від розмірів основ та не залежить від довжини, одержимо співвідношення розмірів стрижня, при якому в якості розрахункової моделі можна приймати стрижень сталого перерізу

$$l < \frac{b}{16 \tan \alpha}, \quad (11)$$

де α – кут конусу. Так, наприклад, для $\alpha = 1^\circ$ $l < 3,58b$, таким чином, навіть для стрижнів з малим кутом конусу використання розрахункової моделі стрижня сталого перерізу дасть значну похибку.

Для спрощення визначення квадрата норми власних функцій перейдемо до границі при $m \rightarrow n$ у виразі від добутку власних функцій з різними індексами

$$(\lambda_n^2 - \lambda_m^2) \int_{z_1}^{z_2} z^2 Z_m Z_n dz = z^2 (Z_n Z'_m - Z_m Z'_n) \Big|_{z_1}^{z_2},$$

в результаті чого одержуємо

$$\int_{z_1}^{z_2} z^2 Z_n^2(z) dz = \frac{z^2}{2\lambda_n} \left(Z'_n \frac{\partial Z_n}{\partial \lambda_n} - Z_n \frac{\partial Z'_n}{\partial \lambda_n} \right) \Big|_{z_1}^{z_2}. \quad (12)$$

Тоді з співвідношення (12) квадрат норми власних функцій з урахуванням ваги буде визначатися за формулою

$$\begin{aligned} \Delta_n^2 &= \frac{2\lambda_n(z-z_1) - \sin 2\lambda_n(z-z_1)}{4\lambda_n \cos^2 \lambda_n z_1} \Big|_{z_1}^{z_2} = \\ &= \frac{2\lambda_n(z_2-z_1) - \sin 2\lambda_n(z_2-z_1)}{4\lambda_n \cos^2 \lambda_n z_1} = \frac{2\lambda_n - \sin 2\lambda_n}{4\lambda_n \cos^2 \lambda_n k}. \end{aligned} \quad (13)$$

Якщо задовольнити другій початковій умові (4), то у виразі (6) коефіцієнти A_n приймуть вигляд

$$A_n = -\frac{v_0 \sqrt{\gamma}}{\lambda_n^3 \Delta_n^2 \cos \lambda_n k} (\sin \lambda_n - \lambda_n (1+k) \cos \lambda_n + \lambda_n k). \quad (14)$$

Розв'язання (6) при значеннях коефіцієнтів (14) визначає пружні переміщення конструкції

$$u(z,t) = -\frac{v_0 l}{c} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(\sin \lambda_n - \lambda_n (1+k) \cos \lambda_n + \lambda_n k)}{z \lambda_n^2 (2\lambda_n - \sin 2\lambda_n)} \sin \lambda_n (z-k) \sin \omega_n t, \quad (15)$$

де $c = \sqrt{E/\gamma}$ - швидкість хвилі повздовжніх коливань стрижня. Тоді напруження будуть визначатися залежністю

$$\sigma(z, t) = -E \frac{v_0}{c} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(\sin \lambda_n - \lambda_n(1+k) \cos \lambda_n + \lambda_n k)}{z^2 \lambda_n^2 (2\lambda_n - \sin 2\lambda_n)} \times \\ \times (z \lambda_n \cos \lambda_n (z-k) - \sin \lambda_n (z-k)) \sin \omega_n t. \quad (16)$$

А вираз для зусилля в ударному перерізі одержимо у вигляді

$$P(t) = -EF_0 \frac{v_0}{c} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(\sin \lambda_n - \lambda_n(1+k) \cos \lambda_n + \lambda_n k)}{k \lambda_n (2\lambda_n - \sin 2\lambda_n)} \sin \omega_n t, \quad (17)$$

де $F_0 = b^2$.

Як приклад, розглянемо удар конічного бойка, численні дослідження для якого були проведені в роботі [1]. Маса бойка становила 4,4 кг, діаметр ударного торця – 25 мм, кут конусу – $0,5^\circ$, довжина – 720 мм. На

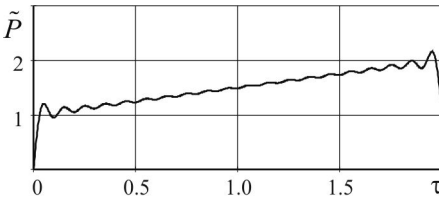


Рис. 3. Графік зміни величини відносного зусилля \tilde{P}

рис. 3 представлений графік відносної величини зусилля в ударному перерізі $\tilde{P} = -\frac{P}{EF_0} \frac{c}{v_0}$ залежно від безрозмірного часу

$\tau = \frac{c}{l} t$. З графіка, зрозуміло, що функцію $\tilde{P}(\tau)$ можна апроксимувати лінійною залежністю на ділянці періоду $T = 2l/c$

$$\tilde{P}(\tau) = d \cdot \tau + 1. \quad (18)$$

Коефіцієнт d визначимо через імпульс сили (17) за період часу T

$$d = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(\sin \lambda_n - \lambda_n(1+k) \cos \lambda_n + \lambda_n k)}{k \lambda_n^2 (2\lambda_n - \sin 2\lambda_n)} (1 - \cos 2\lambda_n) - 1. \quad (19)$$

На графіку рис. 4 наведена залежність коефіцієнту d від параметра k . У випадку $k > 8$, коефіцієнт d наближено можна визначити виходячи з відомого співвідношення, якщо вважати стрижень абсолютно пружним,

$$2Mv_0 = \int_0^{\frac{2l}{c}} P(t) dt, \text{ де } M = \gamma F_0 l \frac{1+3k+3k^2}{3k^2} - \text{ маса стрижня,}$$

$$d = \frac{1+3k}{3k^2}. \quad (20)$$

Таким чином, з використанням графіку рис. 4 або залежності (20) при заданих параметрах бойка, можна визначити макси-мальну величину ударного зусилля. Наприклад, для бойка з діаметром ударного торця 25 мм, кутом конусу 6° , довжиною 250 мм [1], визначаємо параметр

$$k = \frac{d_0}{2l \tan \alpha} = \frac{25}{2 \cdot 250 \cdot \tan 6^\circ} = 0,476, \text{ з}$$

графіку рис. 4 – $d = 2,081$, одержимо

$$\tilde{P}_{\max} = 2,081 \cdot 2 + 1 = 5,162. \quad \text{На}$$

рис. 5, для розглянутого прикладу, побудовані графіки $\tilde{P}(\tau)$ за залежностями (17) та (18).

Висновок

У статті розглянута задача про повздовжній удар конічного стрижня змінного перерізу, що моделює роботу бойка силової імпульсної системи. На підставі аналізу впливу параметрів конструкції на значення головної частоти коливань надано рекомендації про використання наближеного методу розрахунку. Отримано залежності для визначення переміщень і напружень перерізів стрижня, а також для величини зусилля в ударному перерізі. Проведено графічний аналіз залежності зусилля від часу, на підставі чого запропонована інженерна формула для визначення максимальної величини зусилля, яка дозволяє визначати необхідні геометричні параметри бойка.

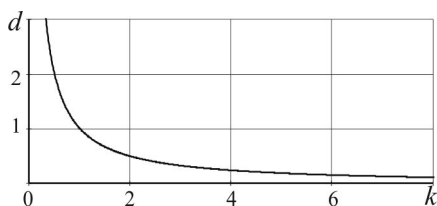


Рис. 4. Залежність d від величини параметра відносного поперечного розміру k

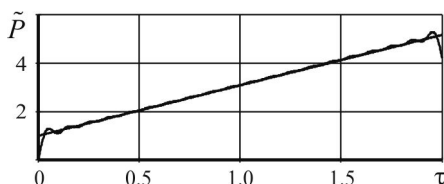


Рис. 5. Графік зміни величини відносного зусилля \tilde{P}

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Алимов О.Д. Удар. Распространение волн деформаций в ударных системах [Текст] / О.Д. Алимов, В.К. Манжосов, В.Э. Еремьянц. – М.: Наука, 1985. – 357 с.
2. Манжосов В.К. Модели продольного удара [Текст] / В.К. Манжосов. – Ульяновск: УлГТУ, 2006. – 160 с.
3. Прочность, устойчивость, колебания [Текст]: Справочник в трех томах. Том 3. Под ред. И.А. Биргера и Я.Г. Пановко. – М.: «Машиностроение», 1968. – 567 с.
4. Абрамов Б.М. Применение метода рядов для исследования продольного удара стержней [Текст] / Б.М. Абрамов, А.Б. Абрамов // В кн.: Теория механизмов и машин. – Харьков: Вища шк., 1972. – С. 47-58.

5. Шевченко Ф.Л. Задачі з опору матеріалів [Текст]: Навчальний посібник./ Ф.Л. Шевченко, С.М. Царенко. – Донець: РІА ДонНТУ, 2011. – 356 с.
6. Саркисов Г.М. Расчеты бурильных и обсадных колонн [Текст] / Г.М. Саркисов. - М.: Недра, 1971. – 206 с.
7. Пановко Я.Г. Введение в теорию механического удара [Текст] / Я.Г. Пановко. – М.: Наука, 1977. – 232 с.
8. Вибрации в технике [Текст]: В 6 т. / И.И. Артоболевский, А.Н. Боголюбов, В.В. Болотин и др. / Под ред. В.В. Болотина. – М.: Машиностроение, 1978. – Т.1: Колебания линейных систем. – 352 с.
9. Бидерман В.Л. Прикладная теория механических колебаний [Текст] / В.Л. Бидерман. – М.: Высш. шк., 1972. – 416 с.
10. Алимов О.Д. Бурильные машины [Текст] / О.Д. Алимов, Л.Т. Дворников. – М.: Машиностроение, 1976. – 295 с.
11. Дворников Л.Т. Формирование ударного импульса в полубесконечном стержне бойком, имеющим форму гиперболоида вращения [Текст] / Л.Т. Дворников, А.А. Мясников // труды ФПИ. – 1977. – вып. 104. – С. 70-82.
12. Арсенин В.Я. Методы математической физики и специальные функции [Текст] / В.Я. Арсенин. – М.:Наука, 1974. – 432 с.

REFERENCES

1. Alimov O. Impact. The wave distribution in impact deformation systems [Text] / O. Alimov, V. Manzhosov, V. Eremyants. - Moscow: Nauka, 1985. - 357 p.
2. Manzhosov V. Models longitudinal impact [Text] / V. Manzhosov - Ulyanovsk: UISTU 2006. - 160 p.
3. Strength, stability, oscillations [Text]: Directory in three volumes. Volume 3. Ed. I. Birger and Ya. Panovko. – Moscow: "Mashinostroyeniye", 1968. - 567 p.
4. Abramov B. Application of the series for the longitudinal impact studies rods [Text] / B. Abramov, A. Abramov // In.: Teoriya mekhanizmov i mashin. – Kharkov: Vishcha Shkola., 1972. - 47-58.
5. Shevchenko F. Problems of Strength of Materials [Text] / F. Shevchenko, S. Tsarenko. - Donetsk: RIA Donetsk National Technical University, 2011. - 356 p.
6. Sarkisov G. Calculations drilling and casing [Text] / G. Sarkisov. Moscow: Nedra, 1971. – 206 p.
7. Panovko Ya. Introduction to the theory mechanical impact [Text] / Ya. Panovko. - Moscow: Nauka, 1977. – 232 p.
8. Vibration in the technique [Text]: 6 volumes / I. Artobolevsky, A. Bogolyubov, V. Bolotin and others / ed. V. Bolotin. – Moscow: Mashinostroyeniye, 1978. - Vol.1: Vibrations of linear systems. – 352 p.
9. Biderman V. Applied theory of mechanical oscillations [Text] / V. Biederman. - Vysshaya Shkola, 1972. – 416 p.
10. Alimov O. Drilling machines [Text] / O. Alimov, L. Dvornikov. – Moscow: Mashinostroyeniye, 1976. – 295 p.
11. Dvornikov L. Formation of the shock pulse in half infinite rod striker of a hyperboloid forms [Text] / L. Dvornikov, A. Butchers // FPI works. - 1977. - Vol. 104. - 70-82.
12. Arsenin V. Methods of mathematical physics and special functions [Text] / V. Arsenin. - Moscow: Nauka, 1974. – 432 p.

Стаття надійшла до редакції 03.02.2014 р.

Улитин Г.М., Царенко С.Н.

УДАР КОНИЧЕСКОГО СТЕРЖНЯ О ЖЕСТКИЙ ОГРАНИЧИТЕЛЬ

В статье рассмотрена задача о продольном ударе конического стержня сплошного сечения. На основании анализа влияния параметров конструкции на значение главной частоты колебаний, даны рекомендации об использовании приближенного метода расчета. Получены зависимости для определения перемещений и напряжений сечений стержня. Предложена инженерная зависимость для определения максимальной величины усилия в ударном сечении.

Ключевые слова: конический стержень, метод Фурье, продольные колебания, продольный удар, механические напряжения.

Ulitin G., Tsarenko S.

IMPACT CONICAL ROD ON HARD LIMITER

The problem is considered of longitudinal impact conical rod in article. A recommendation on the use of the approximate method of calculation is based on an analysis of the influence of design parameters on the value of the main oscillation frequency. There was obtained an equation of the displacement and stress of the rod. Engineering dependence has been proposed to determine the maximum force in the impact section.

Keywords: tapered rod, Furie method, longitudinal oscillations, longitudinal impact, stress.