УДК 539.3

О РАЗВИТИИ КОРРЕКТНЫХ ДИСКРЕТНО-КОНТИНУАЛЬНЫХ МЕТОДОВ МНОГОУРОВНЕВОГО РАСЧЕТА КОНСТРУКЦИЙ

П.А. Акимов[1,2,3]

М.Л. Мозгалева[1]

М. Аслами[1]

О.А. Негрозов[1,2]

[1] Московский государственный строительный университет, г. Москва, Россия
[2] Российская академия архитектуры и строительных наук, г. Москва, Россия
[3] ЗАО «Научно-исследовательский центр «СтаДиО», г. Москва, Россия

1. Понятие о дискретно-континуальных методах многоуровневого расчета строительных конструкций. Как известно, современный этап развития строительной механики, в частности задач определения многоуровневого (в том числе локального) напряженно-деформированного состояния (НДС) конструкций, связан с широким использованием численных методов [4,16,17]. Значительный прогресс в развитии ЭВМ и вычислительной математике, продолжающийся последние десятилетия, обусловил существенное изменение соотношения аналитических, экспериментальных (модельных и натурных) и численных подходов к анализу сложных конструкций, зданий и сооружений. Практика выдвигает задачи мониторинга и комплексного наукоемкого расчетно-теоретического обоснования напряженно-деформированного (и иного) состояния, прочности, устойчивости, надежности и безопасности ответственных объектов промышленного и гражданского строительства, адекватное решение которых может быть зачастую получено только численным путем. Как правило, найти замкнутое аналитическое решение для большинства проблем не представляется возможным, а экспериментальные исследования часто оказываются весьма дорогостоящими, а порой и не-полными. Этим, в частности, и объясняется доминирование численных методов, имеющее место, как в отечественной, так и в зарубежной расчетной практике. Вместе с тем, очевидно, что на всех этапах изучения НДС строительного объекта математическая теория, исследования аналитическими и экспериментальными методами и численный расчет должны применяться совместно и согласованно, причем в конце прошлого столетия появился определенный потенциал для расширения доли аналитических подходов. Достигнутый уровень мощности ЭВМ и имеющийся в арсенале инструментарий аналитических математических средств в сочетании с

разнообразием математических моделей позволил начать разработку корректных численно-аналитических (полуаналитических) методов, сочетающих качественные свойства замкнутых решений с общностью численных подходов. Преимущества такого сочетания, разумеется, отмечались и раньше [18], но многие из разработок прежнего времени либо были не реализуемыми практически из-за отсутствия, по крайней мере, одного из перечисленных факторов, либо в той или иной мере не учитывалась вычислительная специфика и необходимость последующей компьютерной реализации. Полуаналитические методы позволяют получать решения (в том числе локальные) в аналитической форме, способствующей улучшению качества исследования рассматриваемых объектов. Найденная с их помощью картина многоуровневого НДС развивает интуицию расчетчика и понимание работы конструкций, характера влияния на них различных локальных и глобальных факторов. Полуаналитические подходы особенно эффективны в зонах краевого эффекта (эффекта малого пара-метра), там, где часть составляющих решения представляет собой быстроизменяющиеся функции, скорость изменения которых не всегда может быть адекватно учтена традиционными численными методами. Аналитические подходы, в принципе, резко снижают размерность и объем вычислений, особенно в многомерных задачах, и в ряде случаев анализа со-стояния ответственных и конструктивно сложных сооружений переводят трехмерную за-дачу супербольшой вычислительной размерности из разряда «нерешаемой» в «решаемую». Следует также отметить, что предварительное аналитическое изучение отдельных локальных свойств проблемы может оказать значительную помощь при численном решении сложных задач строительной механики. Так, например, сравнение с аналитическими решениями сложной задачи в более простых и частных случаях позволяет дать оценку принятой расчетной схемы конструкции, используемого метода, алгоритма и полученного решения, в частности, оценить достигнутую точность (что особенно важно при верификационных исследованиях).

В работах А.Б. Золотова и П.А. Акимова [1,6-13,26-28] было предложено семейство корректных дискретно-континуальных методов расчета строительных конструкций, включающее дискретно-континуальный метод конечных элементов (ДКМКЭ), дискретно-континуальный метод граничных элементов (ДКМГЭ) и дискретно-континуальный вариационно-разностный метод (ДКВРМ)). Область применения дискретно-континуальных методов составляют преимущественно объекты, имеющие регулярные (постоянные или кусочно-постоянные) физико-геометрические параметры (характеристики) по одному из координатных направлений, которое далее условно называется основным. Характерной особенностью таких объектов является то, что их очень много – в качестве примеров можно привести высотные здания и сооружения, здания и сооружения большой протяженности, гидротехнические сооружения, тоннельные конструкции, большинство типовых конструкций (плиты перекрытий, стеновые панели, ригели, колонны, балочные конструкции, оболочечные конструкции, складчатые конструкции, фундаментные конструкции и т.д.). При их расчетном обосновании исключительно важно построить точное аналитическое решение вдоль основного направления, справедливое при любых воздействиях и промежуточных закреплениях, стыковках и т.д. Под точным аналитическим решением здесь понимается наличие явной формулы вычисления НДС конструкции в произвольной точке сечения (а вовсе не разложение в ряд). Соответствующая формула в явном виде демонстрирует характер поведения вычисляемых факторов (перемещений, их производных и т.д.). Методы являются дискретно-континуальными в том смысле, что по основному направлению сохраняется континуальный характер задачи и соответственно аналитический (абсолютно точный) вид получаемого решения, в то время как по остальным производится дискретизация того или иного вида (конечноэлементная для ДКМКЭ, граничноэлементная для ДКМГЭ и вариационно-разностная для ДКВРМ) с обоснованно контролируемой степенью точности. Разработанные методы позволяют с применением теории обобщенных функций строить точные аналитические решения в зонах сосредоточенных воздействий, избегая «размазок» или осреднений. Будем рассматривать далее ДКМКЭ, являющийся наиболее эффективным и универсальным представителем семейства дискретно-континуальных методов.

2. Суть дискретно-континуального метода конечных элементов для расчета строительных конструкций. ДКМКЭ включает три основных этапа, описанных ниже.

Первый этап. Выполняется сведение исходной задачи расчета конструкции к обыкновенным дифференциальным уравнениям с операторными коэффициентами, сохраняющими общую континуальную постановку за счет выделения производных по основному направлению и использования метода стандартной (расширенной) области А.Б. Золотова [5]. Так, например, для трехмерной задачи теории упругости будем иметь:

$$-L_{k,vv}\partial_3^2\overline{u}_k+\widetilde{L}_{k,uv}\partial_3\overline{u}_k+\widetilde{L}_{k,uu,v}\overline{u}_k=\widetilde{F}_k,\ x_3\in(x_{3,k}^b,x_{3,k+1}^b), \qquad (1)$$

где

$$\widetilde{L}_{k,uv}=L_{k,uv}-L^*_{k\,u,v}\ ;\quad L_{k,vu}=L^*_{k,uv}=-L_{k,uv};\ \overline{\widetilde{F}}_k=\theta_k\overline{F}_k+\partial_{\Gamma,k}\bar{f}_k; \qquad (2)$$

$$L_{k,vv}=\begin{bmatrix}\bar{\mu}_k & 0 & 0\\ 0 & \bar{\mu}_k & 0\\ 0 & 0 & \bar{\lambda}_k+2\bar{\mu}_k\end{bmatrix};\quad L_{k,uv}=\begin{bmatrix}0 & 0 & \partial_1^*\bar{\lambda}_k\\ 0 & 0 & \partial_2^*\bar{\lambda}_k\\ \partial_1^*\bar{\mu}_k & \partial_2^*\bar{\mu}_k & 0\end{bmatrix}\partial_3; \tag{3}$$

$$L_{k,vv}=\sum_{j=1}^{3}\partial_j^*\bar{\mu}\partial_k\partial_j\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\partial_1^*\bar{\mu}_k\partial_1 & \partial_2^*\bar{\mu}_k\partial_1 & 0\\ \partial_2^*\bar{\mu}_k\partial_2 & \partial_2^*\bar{\mu}_k\partial_2 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\partial_1^*\bar{\lambda}_k\partial_1 & \partial_1^*\bar{\lambda}_k\partial_2 & 0\\ \partial_2^*\bar{\lambda}_k\partial_1 & \partial_2^*\bar{\lambda}_k\partial_2 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}; \tag{4}$$

$x=(x_1,x_2,x_3)$ – декартовы координаты; x_3 – координата соответствующая основному направлению; $x_{3,k}^b$, $k=1,...,n_k$ – координаты сечений, в которых задаются граничные условия (в частности, координаты сечений, где происходит «скачкообразное» (разрывы первого рода) изменение физико-геометрических параметров конструкции; $\bar{u}_k=[u_1^{(k)},u_2^{(k)},u_3^{(k)}]^T$ – вектор составляющих перемещений на интервале $x_3\notin(x_{3,k}^b,x_{3,k+1}^b)$; λ_k, μ_k – параметры Ламе на интервале $x_3\in(x_{3,k}^b,x_{3,k+1}^b)$; Ω_k – область, описываемая фрагментом конструкции с постоянными физико-геометрическими параметрами по основному направлению и с границей $\Gamma_k=\partial\Omega_k$; $\theta_k=\theta_k(x)$ – характеристическая функция области Ω_k; $\delta_{\Gamma,k}=\delta_{\Gamma,k}(x)$ – дельта-функция границы $\Gamma_k=\partial\Omega_k$; $F_k=[F_1^{(k)}\ F_2^{(k)}\ F_3^{(k)}]^T$ и $f_k=[f_1^{(k)}\ f_2^{(k)}\ f_3^{(k)}]^T$ – векторы составляющих нагрузок, действующих соответственно внутри и на границе области Ω_k; $\bar{v}_k=[v_1^{(k)}\ v_2^{(k)}\ v_3^{(k)}]^T$ – вектор составляющих нормали к границе $\Gamma_k=\partial\Omega_k$;

$$\theta_k(x)=\begin{cases}1,\ x\in\Omega_k\\ 0,x\notin\Omega_k;\end{cases}\quad \delta_{\Gamma,k}=\frac{\partial\theta_k}{\partial v_k};\ \bar{\lambda}_k=\theta_k\lambda_k;\ \bar{\mu}_k=\theta\mu_k;\ \partial_i=\frac{\partial}{\partial x_i};\partial_i^*=-\partial_i,\ i=1,2. \tag{5}$$

Второй этап. Выполняется дискретизация операторных коэффициентов на основе соответствующих им функционалов. В результате имеем дискретно-континуальную расчетную модель, представляющую собой ансамбль дискретно-континуальных конечных элементов, причем на каждом дискретно-континуальном конечном элементе искомые функции по «неосновным» координатным направлениям аппроксимируются, как правило, полиномами, а в основном направлении их вид остается искомым. Иными словами, неизвестные функции фактически определяются своим поведением на ребрах дискретно-континуального конечного элемента.

При расчете трехмерной конструкции (в рамках модели трехмерной задачи теории упругости) имеем систему из $6N_1N_2$ обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка с граничными условиями

$$(\overline{U}_n^{(k)})'(x_3) = A_k\overline{U}_n^{(k)}\ (x_3) + \widetilde{R}_k(x_3),\ x_3 \in (x_{3,k}^b, x_{3,k-1}^b),\ k = 1,\ldots,n_k - 1; \tag{6}$$

$$B_k^-\overline{U}_n^{(k-1)}(x_{3,k}^b - 0) + B_k^+\overline{U}_n^{(k)}(x_{3,k}^b + 0) = \overline{g}_k^- + \overline{g}_k^+,\ k = 2,\ldots,n_k - 1;$$

$$B_1^+\overline{U}_n^{(1)}(x_{3,k}^b + 0) + B_{n_k}^-\overline{U}_n^{(n_k-1)}(x_{3,k}^b - 0) = \overline{g}_1^+ + \overline{g}_{n_k}^-, \tag{7}$$

где

$$A_k = \begin{bmatrix} 0 & E \\ K_{k,vv}^{-1}K_{k,uu} & K_{k,uv}^{-1}\widetilde{K}_{k,uv} \end{bmatrix};\ \overline{\widetilde{R}}_k(x_3) = -\begin{bmatrix} 0 \\ K_{k,vv}^{-1}\ \overline{R}_{k,u} \end{bmatrix}; \tag{8}$$

$$L_{k,uu} \Rightarrow K_{k,uu;}\ \ \widetilde{L}_{k,uv} \Rightarrow \widetilde{K}_{k,uv};\ L_{k,vv} \Rightarrow K_{k,vv}; \tag{9}$$

$$\overline{U}_n^{(k)} = \overline{U}_n^{(k)}(x_3) = \left[(\overline{u}_n^{(k)})^T\ \ (\overline{v}_n^{(k)})^T\right]; (\overline{U}_n^{(k)})' = \partial_3\overline{U}_n^{(k)}; \tag{10}$$

$$\begin{aligned}\overline{u}_k = \overline{u}_x(x_3) = [&(\overline{u}_n^{(k,1,1)})^T\ \ (\overline{u}_n^{(k,2,1)})^T \ldots (\overline{u}_n^{(k,N_1,1)})^T \ldots \\ &\ldots (\overline{u}_n^{(k,1,2)})^T\ \ (\overline{u}_n^{(k,2,2)})^T \ldots (\overline{u}_n^{(k,N_1,2)})^T \ldots \\ &\ldots (\overline{u}_n^{(k,1,N_2)})^T\ \ (\overline{u}_n^{(k,2,N_2)})^T \ldots (\overline{u}_n^{(k,N_1,N_2)})^T]^T;\end{aligned} \tag{11}$$

$$\begin{aligned}\overline{v}_k = \overline{v}_k(x_3) = \big[&(v_n^{(k,1,1)})^T\ \ (\overline{v}_n^{(k,2,1)})^T \ldots (\overline{v}_n^{(k,N_1,1)})^T \ldots \\ &\ldots (\overline{v}_n^{(k,1,2)})^T\ \ (\overline{v}_n^{(k,2,2)})^T \ldots (\overline{v}_n^{k,N_1,2)})^T \ldots \\ &\ldots (\overline{v}_n^{(k,1,N_2)})^T (\overline{v}_n^{(k,2,N_2)})^T \ldots (\overline{v}_n^{(k,N_1,N_2)})^T]^T;\end{aligned} \tag{12}$$

$$u_n^{(k,p,q)} = \overline{u}_n^{(k,p,q)}(x_3) = \begin{bmatrix} (u_1^{(k,p,q)}) \\ (u_2^{(k,p,q)}) \\ (u_3^{(k,p,q)}) \end{bmatrix};\ \overline{v}^{(k,p,q)} = \overline{v}_n^{(k,p,q)}(x_3) = \begin{bmatrix} (v_1^{(k,p,q)}) \\ (v_2^{(k,p,q)}) \\ (v_3^{(k,p,q)}) \end{bmatrix}; \tag{13}$$

$$\begin{aligned}\overline{R}_{k,n} = \overline{R}_{k,n}(x_3) = \big[&(\overline{R}_{n,n}^{(k,1,1)})^T\ \ (\overline{R}_{n,n}^{(k,2,1)})^T \ldots \overline{R}_{u,n}^{(k,N_1,1)})^T \ldots \\ &\ldots (\overline{R}_{u,n}^{(k,1,2)})^T\ \ (\overline{R}_{u,n}^{(k,2,2)})^T \ldots (\overline{R}_{u,n}^{(k,N_1,2)})^T \ldots \\ &\ldots (\overline{R}_{u,n}^{(k,1,N_2)})^T\ \ (\overline{R}_{u,n}^{(k,2,N_2)})^T \ldots (\overline{R}_{u,n}^{(k,N_1,N_2)})^T]^T;\end{aligned} \tag{14}$$

$$\overline{R}_{u,n}^{(p,q,k)} = \overline{R}_{u,n}^{(p,q,k)}(x_3) = \left[(\overline{R}_{u,1}^{(p,q,k)})\ \ (\overline{R}_{n,1}^{(p,q,k)}\ \overline{R}_{n,2}^{(p,q,k)}\ \overline{R}_{u,3}^{(p,q,k)}\right]^T; \tag{15}$$

$N_1 - 1$ и $N_2 - 1$ – количество дискретно-континуальных конечных элементов по направлению осей, соответствующих переменным $x_1, x_2; u_{1,n}^{(k,p,q)}, u_{2,n}^{(k,p,q)}, u_{3,n}^{(k,p,q)}$ и $v_{1,n}^{(k,p,q)}, v_{2,n}^{(k,p,q)}, v_{3,n}^{(k,p,q)}$ – узловые неизвестные (составляющие перемещений $u_1^{(k)}, u_2^{(k)}, u_3^{(k)}$ на (p,q)-м узле и их производные $v_1^{(k)}, v_2^{(k)}, v_{31}^{(k)}$ по x_3 на интервале $x_3 \in (x_{3,k}^b, x_{3,k+1}^b)$; $R_{u,1}^{(k,p,q)}, R_{u,2}^{(k,p,q)}, R_{u,2}^{(k,p,q)}$ – значения узловых нагрузок, приложенных в (p,q)-м узле по направлению осей, соответствующих переменным x_1, x_2, x_3 на интервале $x_3 \in (x_{3,k}^b, x_{3,k+1}^b)$; B_k^-, B_k^+, $k=2,...,n_k-1$ и $B_1^+, B_{n_k}^-$ – заданные матрицы коэффициентов граничных условий, квадратные $6N_1, N_2$-го порядка; $\bar{g}_k^-, \bar{g}_k^-$, $k=2,...,n_k-1$ и $\bar{g}_1^+, \bar{g}_{n_k}^-$ - заданные $6N_1, N_2$-мерные векторы правых частей граничных условий.

Таким образом, в общем случае выполняется переход к многоточечной краевой задачи для системы, состоящей из нескольких тысяч (для многомерных задач) обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка с кусочно-постоянными коэффициентами, сопровождаемый, как правило, введением дополнительных неизвестных. Разрешающая многоточечная краевая задача в общем случае имеет следующий вид:

$$\bar{y}_k'(x) = A_k \bar{y}_k(x) + \bar{f}_k(x), \tag{16}$$

$$B_k^- \bar{y}(x_k^b - 0) + B_k^+ \bar{y}(x_k^b + 0) = \bar{g}_k^+ + \bar{g}_k^-, \quad k = 2,...,n_k - 1;$$

$$B_1^+ \bar{y}(x_1^b + 0) + B_{n_k}^- \bar{y}(x_{n_k}^b - 0) = \bar{g}_1^+ + \bar{g}_{n_k}^-, \tag{17}$$

где x – переменная соответствующая продольному направлению; x_k^b, $k=1,...,n_k$ – координаты точек задания граничных условий (общее количество граничных условий $n_k - 1$); $\bar{y}_k(x)$ – искомая n-мерная вектор-функция на интервале $x \in (x_k^b, x_{k+1}^b)$; A_k и $\bar{f}_k(x)$ – соответственно матрица постоянных коэффициентов n-го порядка и n-мерная вектор-функция правых частей на интервале $x \in (x_k^b, x_{k+1}^b)$.

Третий этап. Выполняется корректное построение точного аналитического решения разрешающих систем обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Заметим, что все сложности реализации дискретно-континуальных методов определяются характерными специфическими особенностями этих систем. Прежде всего, важен фактор количества рассматриваемых дифференциальных уравнений. В рамках известных традиционных методов Л.В. Канторовича, В.З. Власова и метода прямых [18] можно решить систему, насчитывающую очень небольшое число обыкновенных дифференциальных уравнений, и даже это зачастую требует зачастую привлечения ряда специальных мер (ограничение длины конструкции и проч.). Указанные методы вообще изначально были ориентированы их разработчиками исключительно на ручной счет. Так, например, выбор базисных функций в них чаще всего не предполагает никакой дискретизации. Кроме того, эти базисные функции далеко не всегда, а особенно в практических задачах, удается подобрать таким образом, чтобы они удовлетворяли соответствующей части заданных граничных условий. При решении же трехмерных задач с использованием ДКМКЭ число уравнений достигает нескольких тысяч, и все традиционно применяемые подходы для аналитического решения таких систем оказывались несостоятельными. В связи с выше отмеченным, практически все исследователи ищут не точное аналитическое решение в виде формулы со слагаемыми экспоненциального типа, а строят решение с помощью разложений в ряды (методы Л.В. Канторовича и В.З. Власова, метод конечных полос), использований сплайн-функций (метод конечных полос) и т.д. [18,30,31]. Стандартные полуаналитические подходы очень плохо справляются с учетом сосредоточенных нагрузок и нагрузок, распределенных на небольших участках. Между тем расчет на такие нагрузки является наиболее важным для большинства строительных конструкций. Не менее критичны в этом же смысле и граничные условия: либо они несостоятельны, либо для их адекватного учета требуется некоторый специальный вид таких условий, не имеющий места в общем случае. Точность и сходимость решений, получаемых по таким методам, часто сильно зависит от вида выбираемых базисных функций для аппроксимации неизвестных, а также от количества учитываемых членов ряда. Сходимость же в зонах краевых эффектов, сосредоточенных факторов, концентраций напряжений и деформаций (т.е. в наиболее ответственных зонах) весьма медленная и слабо зависит от числа учитываемых членов ряда Фурье. И даже, например, если сходимость для перемещений относительно высока, для деформаций, напряжений и внутренних усилий она много меньше. Данный факт отчасти объясняется известным в теории рядов эффектом Гиббса [15], способам борьбы с которым посвящено достаточно много работ как отечественных, так и зарубежных специалистов. Отмеченные недостатки стандартных методов следуют из математической сути задачи, эти слабые места достаточно подробно указываются в обзорных статьях и монографиях (например, [31]).

Вычислительная специфика при решении систем обыкновенных дифференциаль-ных уравнений (6) определяется матрицами $A_k,\ k=1,\ldots,n_k$, с постоянными коэффициентами. Решение, его корректность и эффективность зависят от спектра. Здесь следует отметить, что для большинства задач строительной механики спектр матрицы A_k имеет следующие особенности:

– наличие собственных значений с действительными частями разных знаков;
– «жесткость» системы, т.е. отношение максимального собственного числа матрицы к минимальному (по модулю) является большим числом

$$\left|\lambda_{k,\max}\right| / \left|\lambda_{k,\min}\right| \geq M_k \text{, где } M_k \text{ – большое число;} \qquad (18)$$

– в спектральном разложении матрицы A_k присутствуют жордановы клетки неединичного порядка и присоединенные (корневые) вектора, при этом они соответствуют нулевым собственным значениям;
– жордановы клетки неединичного порядка имеют конечный вид и практически не зависят от густоты сетки дискретно-континуальных конечных элементов, аппроксимирующих «поперечное» сечение конструкции, число жордановых клеток неединичного порядка небольшое.

Итак, спектральное разложение матрицы kA имеет вид:

$$A_k = T_k J_k T_k^{-1} \; ; \qquad (19)$$

где

$$J_{k,p} = \begin{bmatrix} J_{k,1} & & & \\ & J_{k,2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_{k,n_k} \end{bmatrix}; \; J_{k,p} = \begin{bmatrix} \lambda_{k,p} & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_{k,p} & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \lambda_{k,p} \end{bmatrix}; \; \dim J_{k,p} = m_{k,p} \; ; \qquad (20)$$

T_k – невырожденная матрица n-го порядка, столбцами которой являются собственные и корневые (присоединенные) векторы матрицы A_k ; J_k – матрица Жордана n-го порядка для матрицы A_k ; $J_{k,p}$ – жорданова клетка, соответствующая собственному значению $\lambda_{k,p}$; u_k – количество различных собственных значений матрицы A_k .

Традиционный подход, рекомендуемый в неспециальной математической литературе и публикациях, посвященных строительной механике, фактически сразу предлагает искать решение системы типа (ниже $\bar{y}(x)$ – искомая n-мерная вектор-функция; A и $\bar{f}(x)$ – соответственно матрица постоянных коэффициентов n-го порядка и n-мерная вектор-функция правых частей)

$$\bar{y}'(x) = A\bar{y}(x) + \bar{f}(x) \,, \qquad (21)$$

в следующем виде

$$\bar{y}(x)=\exp(Ax)\bar{y}(0)+\int_{0}^{x}\exp(A(x-\zeta))\bar{f}(\zeta)d\zeta\ , \qquad (22)$$

Функция от матрицы в (12) вычисляется по известным правилам, причем

$$\exp(Ax)=T\exp(Jx)T^{-1}\ , \qquad (23)$$

где T – невырожденная матрица n-го порядка, столбцами которой являются собственные и корневые (присоединенные) векторы матрицы A; J – матрица Жордана n-го порядка для матрицы [2].

Решение типа (22) в первую очередь ориентируются на задачи Коши. Для случаев, когда исходные уравнения имеют эллиптический тип, (22) является, по сути, решением по методу начальных параметров или начальных функций. Несмотря на наличие в некотором ограниченном числе задач решений по формуле (22), в общем случае данная формула практически нереализуема. Это связано с тем обстоятельством, что в решении (22) всегда имеются функции вида $\exp(\lambda x)$, где $\lambda>0$, причем величина достигает значительных величин (например, $12<\lambda x<300$). Реализация таких функций на ЭВМ является «вычислительной катастрофой». Следует отметить, что чем точнее аппроксимация по неосновным направлениям, тем большие значения принимает величина λx .

Системы (16), как указывалось, являются жесткими. В частности, отсюда вытекает характер решения вблизи границ (краевой эффект) и в зонах приложения сосредоточенных нагрузок. Таким образом, часть составляющих решения системы является быстроизменяющимися, а часть меняется медленно. Как следствие, никакой дискретный подход, например использующий сплайны, не в состоянии уловить все компоненты решения одновременно и его асимптотику. Важным параметром является также и протяженность рассматриваемой конструкции. Как было показано выше, если, например, она значительна, то становятся неработоспособными те методы, где на каком-либо этапе используются гиперболические функции. Часто решение систем (16) ведется либо некорректными методами, не учитывающими специфику строительных задач (например, метод начальных параметров), либо используются методы, не позволяющие получить аналитическое решение (методы типа прогонки, ортогональной прогонки и другие [18], причем метод ортогональной прогонки сопряжен с большим объемом вычислений и неоправданным усилением (ортогонализацией и нормировкой) исчезающих по длине факторов).

В литературе жесткие системы, безусловно, исследуются [19], но в основном при решении задач Коши и, как правило, для систем дифференциальных уравнений с коэффициентами, зависящими от аргумента. В нашем случае цель состояла именно в получении аналитического решения при постоянных коэффициентах, что является характерным для большинства задач расчета типовых строительных конструкций.

Важной особенностью при построении решения в форме (22) является необходимость вычисления жордановых клеток и присоединенных векторов. Эта задача также является некорректной, необходимое для ее решения математическое и программное обеспечение в общем случае отсутствует. В литературе по линейной алгебре [20] доказывается, что не может существовать ни одного численно устойчивого универсального способа вычисления жордановых канонических форм. Данное обстоятельство можно преодолеть путем возмущения матрицы, но при этом возникает проблема адекватного выбора параметров возмущения и, кроме того, теряется аналитический характер получаемого решения.

Суть предложенного в [1,6-13,26,27] подхода описана ниже.

Строится фундаментальная матрица-функция, свертка с которой является оператором, обратным к исходному дифференциальному. Для этой цели исходная матрица коэффициентов системы представляется в виде следующей суммы:

$$A_k = A_{k,+} + A_{k,-} + A_{k,0}, \tag{24}$$

где $A_{k,+} = P_{k,+} A_k$; $A_{k,-} = P_{k,-} A_k$; $A_{k,0} = P_{k,0} A_k = A_k - A_{k,+} - A_{k,-}$,

где $P_{k,+}$ – проектор на подпространство, отвечающее собственным векторам, соответствующим ненулевым собственным значениям с неотрицательными действительными частями; $P_{k,-}$ – проектор на подпространство, отвечающее собственным векторам, соответствующим ненулевым собственным значениям с отрицательными действительными частями; $P_{k,0}$ – проектор на подпространство, отвечающее собственным и присоединенным векторам, соответствующим нулевым собственным значениям;

$$P_{k,+} = T_{k,+} (\tilde{T}_{k,+} T_{k,+})^{-1} \tilde{T}_{k,+};\ P_{k,-} = T_{k,-} (\tilde{T}_{k,-} T_{k,-})^{-1} \tilde{T}_{k,-};\ P_{k,0} = E - P_{k,+} - P_{k,-}\ ; \tag{25}$$

$T_{k,+}$ и $\tilde{T}_{k,+}$ – соответственно матрицы размерности $n_k \times n_{k,+}$ и $n_{k,+} \times n_k$, содержащие правые и левые собственные векторы, соответствующие ненулевым собственным значениям матрицы с неотрицательными действительными частями; $T_{k,-}$, $\tilde{T}_{k,-}$ – соответственно матрицы размерности $n_k \times n_{k,-}$ и $n_{k,-} \times n_k$, содержащие правые и левые собственные векторы, соответствующие ненулевым собственным значениям матрицы A_k с неотрицательными действитель-ными частями; E – единичная матрица соответствующего порядка; $n_{k,+}$ и $n_{k,-}$ – соответственно количество ненулевых собственных значений с неотрицательными и отрицатель-ными действительными частями. k

Заметим, что матрицы $\tilde{T}_{k,+}$ и $\tilde{T}_{k,-}$ предлагается определять из решения левой про-блемы собственных значений для матрицы A_k (учитывается тот факт, что, как следует из сказанного выше, практически невозможно на практике построить матрицы T_k и T_k^{-1} в разложении (19) при наличии в матрице J_k жордановых клеток неединичного порядка). Левая проблема собственных значений матрицы A_k, как известно, сводится к (правой) проблеме собственных матрицы A_k^T. Отметим, что после решения проблем собственных значений для матриц A_k и A_k^T следует провести такую сортировку их собственных значений (и соответственно собственных векторов), чтобы сначала нумеровались все ненулевые собственные значения. Сопутствующие преобразования определяются формулами (знак $\Rightarrow$ условно обозначает операцию присваивания)

$$\tilde{T}_{k,+} \Rightarrow (\tilde{T}_{k,+} T_{k,+})^{-1} \tilde{T}_{k,+}; \qquad \tilde{T}_{k,-} \Rightarrow (\tilde{T}_{k,-} T_{k,-})^{-1} \tilde{T}_{k,-}. \tag{26}$$

Подчеркнем, что проектор $P_{k,0}$ не нуждается в специальном построении. Он элементарно находится как разность единичной матрицы соответствующего порядка с парой проекторов $P_{k,+}$ и $P_{k,-}$, которым он ортогонален. 0

Предлагаемые процедуры также облегчают применение метода стандартной области [5], связанное с наличием дискретно-континуальных элементов нулевой жесткости.

Соответствующие фундаментальные матрицы-функции для систем (16) могут быть представлены в следующем виде:

$$\varepsilon_k(x) = T_{k,1} \tilde{\varepsilon}_{k,0}(x) \tilde{T}_{k,1} + \chi(x,0) \left[P_{k,0} + \sum_{k=1}^{m_{k,\max}-1} \frac{x^k}{k!} A_{k,0}^k \right], \tag{27}$$

где

$$\chi(x,\lambda_{k,p})=\begin{cases}\chi(x), & \mathrm{Re}(\lambda_{k,p})\le 0\\ -\chi(-x), & \mathrm{Re}(\lambda_{k,p})>0;\end{cases}, \tag{28}$$

$$\tilde{\varepsilon}_{k,0}(x)=diag\{\chi(x,\lambda_{k,p})\exp(\lambda_{k,1}x),\ldots,\chi(x,\lambda_{k,l})\exp(\lambda_{k,l}x)\}; \tag{29}$$

$$T_{k,1}=\begin{bmatrix}T_{k,+} & T_{k,-}\end{bmatrix};\quad \tilde{T}_k=\begin{bmatrix}\tilde{T}^T_{k,+} & \tilde{T}^T_{k,-}\end{bmatrix}^T; \tag{30}$$

$m_{k,\max}=\max\limits_{l\le i\le u} m_{k,i}$, причем величина $m_{k,\max}$ конечна и небольшая; $l_k=n_{k,+}+n_{k,-}$ – число нену-левых собственных значений матрицы A_k; $x_+=\chi(x)\cdot x$.

Следует отметить, что в приведенном выражении для фундаментальных матриц-функций нет компонент типа $\exp(\lambda x)$, где $\lambda>0$. Следует особо отметить, что такие представления основаны на том, что из свойств задач строительной механики вытекает, что все жордановы клетки неединичного порядка соответствуют нулевым собственным значениям, являются нильпотентными, т.е. их некоторая степень приводит к нулевым клеткам.

Вектор-функция решение задачи (16), (17) на произвольном интервале $x\in(x_k^b,x_{k+1}^b)$, обозначается $\bar{y}_k(x)$ и определяется формулой

$$\bar{y}_k(x)=(\varepsilon(x-x_k^b)-\varepsilon(x-x_{k+1}^b))\bar{C}_k+\varepsilon(x)*\bar{f}_k(x), x\in(x_k^b,x_{k+1}^b), \tag{31}$$

где $\bar{C}_k$ – вектор постоянных коэффициентов n-го порядка, определяемых из условий (17); * – символ, обозначающий операцию свертки;

$$\bar{f}_k(x)\equiv f(x)\theta(x,x_k^b,x_{k+1}^b);;\quad \theta(x,x_k^b,x_{k+1}^b)=\begin{cases}1, x\in(x_k^b,x_{k+1}^b)\\ 0, x\in(x_k^b,x_{k+1}^b).\end{cases} \tag{32}$$

Общий вид решения (31) является корректным при любых условиях и свободным от всех недостатков, присущих, например, методам типа начальных параметров. Методы типа начальных параметров применимы с практической точки зрения, главным образом, только лишь при расчете балок и пространственных стержней при отсутствии упругого основания.

Прямое или точное решение многоточечных краевых задач строительной механики для систем обыкновенных дифференциальных уравнений в литературе (выполнен анализ более 600 публикаций, в том числе обзорных статей, см., например, [31]) не приводится. По-видимому, главную роль в этом сыграли перечисленные особенности подобных задач. Отметим, что эти особенности характерны именно для строительных задач (расчеты конструкций, зданий, сооружений) и, может быть, по этой причине они не являлись предметом широкого исследования в математике, хотя решением близких проблем в значительной степени занимались в МГУ им. М.В. Ломоносова, в том числе в научных школах М.В. Келдыша, А.Г. Костюченко [14], Б.М. Левитана, А.А. Шкаликова [21-25] и др. Однако в работах перечисленных ученых исследовались в основном качественные вопросы (существование, единственность и т.д.), тогда как проблемы численной реализации практически не затрагивались. А.Б. Золотовым и П.А. Акимовым реализован устойчивый алгоритм аналитического решения при любом числе неизвестных в корректной для вычислений форме, который является основой для построения программных комплексов промышленного типа.

В целом, представляется, что ДКМКЭ послужат надежной основой и для их дальнейшей «коммерциализации», проводимой по двум направлениям:

– создание, апробация и внедрение в практику самодостаточных исследовательских программных комплексов;

– «встраивание» в качестве эффективных альтернативных блоков в передовые отечественные конечно/суперэлементные программные комплексы, интенсивно эксплуатируемые при расчетном обосновании типовых и уникальных строительных конструкций, зданий и сооружений мегаполисов на стадиях их проектирования и эксплуатации-мониторинга (данное направление реализуется в рамках исследований О.А. Негрозова [27]).

3. Суть вейвлет-реализации дискретно-континуального метода конечных элементов для локального расчета строительных конструкций. Характерными особенностями развития строительного комплекса в последние годы являются значительный рост числа домов, возводимых по индивидуальным проектам с применением нестандартных строительных материалов и оригинальных конструктивных решений, обусловленных реальными условиями и пожеланиями заказчика, а также увеличивающийся объем работ, связанный с переделкой и реконструкцией существующих зданий и сооружений, в том числе и по результатам мониторинга строительных объектов. Для недопущения аварийных ситуаций необходимо подтверждать принимаемые конструктивные решения надлежащими рас-четами. Современные численные (прежде всего, метод конечных элементов (МКЭ)) и численно-аналитические методы позволяют моделировать поведение сложных строительных объектов в целом, что может привести на практике к вычислительным схемам исключительно большой размерности. Вместе с тем, квалифицированному расчетчику известно, что наиболее опасным с точки зрения прочности является напряженнодеформированное состояние (НДС) в относительно небольшом числе локальных зон конструкций, причем расположение этих зон, как правило, известно заранее. К последним следует отнести зоны краевого эффекта, т.е. разного рода углы, трещины, щели, места контактов и связей различных конструктивных элементов, места локальных изменений, обусловленных реконструкцией объекта (например, пробивка новых проходов, снос опор, усиления и т.д.) и др. Таким образом, возникает задача разработки, исследования и развития методов локального высокоточного расчета строительных конструкций, тем более актуальная, с позиции того, что кор-ректная локализация расчетного обоснования позволяет существенно сократить количество неизвестных. Вейвлет-анализ [3,29], позволяющий всесторонне оценить влияние различных с точки зрения локализации факторов, является здесь весьма эффективным инструментарием. Предметом исследований авторов статьи в настоящее время, в частности, является применение аппарата вейвлет-анализа для корректного численно-аналитического расчета и анализа работы конструкций на основе использования и развития ДКМКЭ [28]. В качестве простейшего вейвлетного базиса здесь применяются дискретные базисы Хаара.

Одномерный дискретный базис Хаара на отрезке $[a,b]$ имеет вид:

$$\psi_j^p(i)=\alpha_p^{-1}\begin{cases}1, & 2^{p+1}(j-1)\le i<2^p(2j-1)\\ -1, & 2^p(2j-1)\le i<2^{p+1}j \qquad i=1,2,\ldots,n,\ \ 0\le p<M;\\ 0, & i<2^{p+1}(j-1)\cup i\ge 2^{p+1}j,\end{cases} \tag{33}$$

$$\psi_1^M(i)=\alpha_M^{-1},\ \ i=1,2,\ldots,n, \tag{34}$$

где $\psi_j^p(i)$ – j-я функция Хаара уровня p, определенная в точках разбиения отрезка $x_i=a+(i-1)h, i=1,2,\ldots,n$ $(h=(b-a)/(n-1))$; $n=2^M$ – количество частей, на которые разбивается отрезок (M – некоторое целое число).

Двумерный дискретный базис Хаара на прямоугольной области $\Omega=\{(x_1,x_2): 0\le x_1\le l_1,\ 0\le x_2\le l_2\}$ определяется следующими формулами:

$$\psi_{s_1,s_2,j_1,j_2}^p(i_1,i_2)=\alpha_p^{-1}\begin{cases}(-1)^{k_1s_1+k_2s_2}, & \bigcap\limits_{q=1}^{2}\bigcup\limits_{k_q}^{1}\begin{pmatrix}2^{p+1}(j_q-1+k_q/2)\wedge\\ \wedge i_q\le 2^{p+1}(j_q-1/2+k_q/2)\end{pmatrix},\\ 0, & \text{в остальных случаях}\end{cases} \tag{35}$$

$$i_1=1,2,\ldots,n;\ \ i_2=1,2,\ldots,n;\ \ 0\le p\le M;$$

$$\psi^{M}_{0,0,1,1}(i_1,i_2)=\alpha_M^{-1},\ i_1=1,2,\ldots,n;\ i_2=1,2,\ldots,n, \tag{36}$$

где $\psi^{p}_{s_1,s_2,j_1,j_2}(i_1,i_2)$ – функция Хаара, определенная в узлах равномерной сетки, аппроксимирующей область Ω с координатами $x_{1,i}=(i_1-1)h_1,\ i_1=1,2,\ldots,n,\ x_{2,i}=(i_2-1)h_2,\ i_2=1,2,\ldots,n$ (причем недопустим случай $s_1=s_2=0$); $n=2^M$ (M – некоторое целое число);

$$N_p=\begin{cases} n/2^{p+1}=2^{M-(p+1)},\ 0\le p<M \\ 1,\ p=M; \end{cases} \qquad \alpha_p=\begin{cases} \sqrt{2^{p+1}},\ 0\le p<M \\ \sqrt{2^M}=\sqrt{n},\ p=M. \end{cases} \tag{37}$$

В [1,8] рассмотрены корректные быстрые алгоритмы вейвлет-преобразований по одномерному и двумерному базисам Хаара, корректные алгоритмы осреднения функций, разложенных по одномерному и двумерному дискретному базису Хаара, а также корректные алгоритмы многоуровневых аппроксимаций функций, разложенных по одномерному и двумерному дискретному базису Хаара.

В одномерном случае произвольная функция f, определенная в точках разбиения рассматриваемого отрезка, может быть разложена в ряд Хаара:

$$f(i)=\sum_{p=0}^{M}\sum_{j=1}^{N_p} v_j^p \psi_j^p(i), \tag{38}$$

где $v_j^p,\ j=1,2,\ldots,N_p,\ p=1,2,\ldots,M$ – коэффициенты разложения функции $f(i)$ по базису Хаара, определяемые как скалярное произведение

$$v_j^p=(\bar{f},\bar{\psi}_j^p)=\sum_{p=0}^{M} f(i)\psi_j^p(i),\quad j=1,2,\ldots,N_p,\ \ p=1,2,\ldots,M; \tag{39}$$

$$f=\left[f(1)\ \ f(2)\ \ \ldots\ \ f(n)\right];\ \bar{\psi}_j^p=\left[\psi_j^p(1)\ \ \psi_j^p(2)\ \ \ldots\ \ \psi_j^p(n)\right] \tag{40}$$

Формулу (39) можно переписать в матрично-векторном виде

$$\bar{v}=DQ^0\bar{f}, \tag{41}$$

где Q^0 – матрица ненормированных базисных функций Хаара (т.е. функций вида (33), (34), но у которых отсутствует деление соответственно на величину α_p для формулы (1) и α_M для формулы (26)), записанных по строкам; D – диагональная матрица, на главной диаго-нали которой располагаются величины $\alpha_p,\ p=1,2,\ldots,M$; $\bar{v}$ – вектор, составленных из искомых коэффициентов разложения функции $f(i)$ по базису Хаара (33), (34).

При осреднении на некотором уровне для всех имеем:

$$(Du^p)_{2j-1} \approx (Du^p)_{2j} \approx (D\widetilde{u}^p)_{2j-1},\ v^p_{2j-1} = v^p_{2j},\ \ j=1,2,\ldots,N_{p+1}, \tag{42}$$

где

$$(D\widetilde{u}^p)_{2j-1} = (\widetilde{u}^p_{2j} - \widetilde{u}^p_{2j-1})/(2^{p+1}h)\ . \tag{43}$$

Следовательно, формулы осреднения могут быть записаны в виде:

$$v^p_{2j-1} = v^p_{2j} = \beta v^{p+1}_{2j},\quad j = 1, 2, \ldots, N_{p+1}\,, \tag{44}$$

где $\beta = 1/(2\sqrt{2})$.

Матрично-векторная форма записи алгоритма осреднения:

$$\bar{v}^k = R_k \bar{v}^{k+1}, \tag{45}$$

где $R_k = \bar{\beta} \otimes I_{N_{k+1}}$, $\bar{\beta} = \beta\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$; R_k – матрица рекуррентного перехода на k-й уровень; I_n – единичная матрица n-го порядка; $\otimes$ – обозначение операции прямого произведения.

При необходимости осреднения на некотором уровне имеем:

$$\bar{v}^p = W_p \bar{v}^{q+1},\ \ p=0,1,2,\ldots,q, \tag{46}$$

где

$$W_p = \prod_{s=p}^{q} R_s \ \text{ или } W_p = \bar{\beta}_{p,q} \otimes I_{N_{p+1}},\ \bar{\beta}_{p,q} = \beta^{q-p+1}\bar{e}_{q+1}; \tag{47}$$

W_p – матрица рекуррентного перехода на k-й уровень; $\bar{e}_{q+1}$ – вектор размерности N_{q+1}, составленный из единиц. В двумерном случае для произвольной функции $f(i_1, i_2)$, определенной в узлах рассмотренной выше прямоугольной сетки, будем иметь:

$$f(i_1,i_2) = \sum_{p=0}^{M}\sum_{j_1=1}^{N_p}\sum_{j_2=1}^{N_p}(v^p_{1,0,j_1,j_2}\psi^p_{1,0,j_1,j_2}(i_1,i_2) + v^p_{0,1,j_1,j_2}\psi^p_{0,1,j_1,j_2}(i_1,i_2) + v^p_{1,1,j_1,j_2}\psi^p_{1,1,j_1,j_2}(i_1,i_2)), \tag{48}$$

$v^p_{1,0,j_1,j_2}$, $v^p_{0,1,j_1,j_2}$, $v^p_{1,1,j_1,j_2}$, $j_1 = 1, 2, \ldots, N_p$, $j_2 = 1, 2, \ldots, N_p$, $p = 1, 2, \ldots, M$ - коэффициенты разложения функции $f(i_1, i_2)$ по дискретному базису Хаара,

$$v^p_{s_1,s_2,j_1,j_2} = (\bar{f}, \bar{\psi}^p_{s_1,s_2,j_1,j_2}) = \sum_{i_1=1}^{N}\sum_{i_2=1}^{N} f(i_1,i_2)\bar{\psi}^p_{s_1,s_2,j_1,j_2}(i_1,i_2), \tag{49}$$

$$s_1=0,1,\ s_2=0,1,\ j_1=1,2,\ldots,N_p,\ j_2=1,2,\ldots,N_p,\ p=1,2,\ldots,M;$$

$$f = \left[f(1{,}1) \;\ldots\; f(1{,}n) \;\; f(2{,}1) \;\ldots\; f(2{,}n) \;\ldots\; f(n{,}1) \;\ldots\; f(n{,}n) \right]^T; \quad (50)$$

$$\overline{\psi}^{\,p}_{s_1,s_2,j_1,j_2} = \left[\psi^{\,p}_{s_1,s_2,j_1,j_2}(1{,}1) \ldots \psi^{\,p}_{s_1,s_2,j_1,j_2}(1{,}n) \ldots \overline{\psi}^{\,p}_{s_1,s_2,j_1,j_2}(2{,}1) \ldots \overline{\psi}^{\,p}_{s_1,s_2,j_1,j_2}(2{,}n) \ldots \right.$$

$$\left. \ldots \psi^{\,p}_{s_1,s_2,j_1,j_2}(n{,}1) \ldots \psi^{\,p}_{s_1,s_2,j_1,j_2}(n{,}n) \right]^T. \quad (51)$$

Матрично-векторный вид формулы (49) следующий:

$$\overline{v} = DQ^0 \overline{f}, \quad (52)$$

где Q^0 – матрица ненормированных базисных функций Хаара, записанных по строкам; D – диагональная матрица, на главной диагонали которой располагаются величины α_p, $p = 1, 2, \ldots, M$; v – вектор, составленных из искомых коэффициентов коэффициенты разложения функции $f(i_1, i_2)$ по базису Хаара.

При осреднении на некотором уровне q для всех $p = 1, 2, \ldots, q$ имеем (ниже $s_1 = 0{,}1;\ s_2 = 0{,}1$ (кроме $s_1 = s_2 = 0$); $j_1 = 1, 2, \ldots, N_p$, $j_2 = 1, 2, \ldots, N_p$)

$$(D_1 u^p)_{2j_1-1,2j_2-1} = (D_1 u^p)_{2j_1-1,2j_2} = (D_1 u^p)_{2j_1,2j_2-1} = (D_1 u^p)_{2j_1,2j_2} \approx (D_1 \tilde{u}^p)_{2j_1-1,2j_2-1_{2j-1}}; \quad (53)$$

$$(D_2 u^p)_{2j_1-1,2j_2-1} = (D_2 u^p)_{2j_1-1,2j_2} = (D_2 u^p)_{2j_1,2j_2-1} = (D_2 u^p)_{2j_1,2j_2} \approx (D_2 \tilde{u}^p)_{2j_1-1,2j_2-1_{2j-1}}; \quad (54)$$

$$(D_2^+ D_1^+ u^p)_{2j_1-1,2j_2-1} = (D_2^+ D_1^+ u^p)_{2j_1-1,2j_2} = (D_2^+ D_1^+ u^p)_{2j_1,2j_2-1} = (D_2^+ D_1^+ u^p)_{2j_1,2j_2} \approx$$

$$\approx (D_2^+ D_1^+ \tilde{u}^{\,p})_{2j_1-1,2j_2-1_{2j-1}}; \quad (55)$$

$$v^p_{s_1,s_2,2j_1-1,2j_2-1} = v^p_{s_1,s_2,2j_1,2j_2-1} = v^p_{s_1,s_2,2j_1-1,2j_2} = v^p_{s_1,s_2,2j_1,2j_2}. \quad (56)$$

Следовательно, формулы осреднения могут быть записаны в виде:

$$v^p_{s_1,s_2,2j_1-1,2j_2-1} = v^p_{s_1,s_2,2j_1,2j_2-1} = v^p_{s_1,s_2,2j_1-1,2j_2} = v^p_{s_1,s_2,2j_1,2j_2} = s_{s_1,s_2} v^{p+1}_{s_1,s_2,j_1,j_2}. \quad (57)$$

где

$$\beta_{1,0} = 0.25;\ \beta_{0,1} = 0.25;\ \beta_{1,1} = 0.125. \quad (58)$$

Матрично-векторная форма записи алгоритма осреднения:

$$\overline{v}^k = R_k \overline{v}^{k+1}, \text{ где } R_k = \beta^G \otimes I_{N^2_{л+1}}; \quad (59)$$

$$R_k = \beta^G = \beta \otimes [1\,1\,1\,1]^T;\ \beta = diag\{\beta_{1,0}, \beta_{0,1}, \beta_{1,1}\}. \quad (60)$$

При необходимости осреднения на некотором уровне q имеем:

$$\overline{v}^{\,p} = W_p \overline{v}^{\,q+1},\ p = 0{,}1{,}2{,}\ldots{,}q, \quad (61)$$

где

$$W_p = \prod_{s=p}^{q} R_s \text{ или } W_p = \beta^G_{p,q} \otimes I_{N^2_{л+1}};\ \beta^G_{p,q} = \beta^{q-p+1} \overline{e}_{q+1}; \quad (62)$$

$\overline{e}_{q+1}$ – вектор, составленный из единиц, размерности N_{q+1}^2.

После перехода в (6), (7) к дискретному двумерному базису Хаара по переменным x_1 и x_2, реализации процедур редукции и осреднения получим соответствующую редуцированную постановку многоточечной краевой задачи для системы обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\overline{V}_k' = A_k \overline{V}_k + \overline{\tilde{F}}_k, \quad x_3 \in (x_{3,k}^b, x_{3,k+1}^b),\ k=1,\dots,n_k-1; \tag{63}$$

$$\tilde{B}_k^- \overline{V}_{k-1}(x_{3,k}^b - 0) + \tilde{B}_k^+ \overline{V}_k(x_{3,k}^b + 0) = \overline{\tilde{g}}_k^- + \overline{\tilde{g}}_k^+,\ k=1,\dots,n_k-1;$$

$$\tilde{B}_1^+ \overline{V}_1(x_{3,1}^b + 0) + \tilde{B}_{n_k}^- \overline{V}_{n_k-1}(x_{3,n_k}^b - 0) = \overline{\tilde{g}}_1^+ + \overline{\tilde{g}}_{n_k}^-, \tag{64}$$

где

$$\overline{U}_n^{(k)}(x_3) = S_{b,k} \overline{V}_k(x_3);\ S_{b,k} = \begin{bmatrix} S_k & 0 \\ 0 & S_k \end{bmatrix};\ S_k = P_{12}^T Q_b R_{b,k}; \tag{65}$$

где

$$R_{b,k} = \begin{bmatrix} R_{k,1} & 0 & 0 \\ 0 & R_{k,2} & 0 \\ 0 & 0 & R_{k,3} \end{bmatrix};\ Q_b = \begin{bmatrix} Q & 0 & 0 \\ 0 & Q & 0 \\ 0 & 0 & Q \end{bmatrix};\ \overline{w}_i^{(k)}(x_3) = R_{k,i} \overline{w}_i^{(k),red}(x_3),\ i=1,2,3; \tag{66}$$

$$P_{12} u_n^{(k)}(x_3) = \begin{bmatrix} \overline{u}_{1,n}^{(k)}(x_3) \\ \overline{u}_{2,n}^{(k)}(x_3) \\ \overline{u}_{3,n}^{(k)}(x_3) \end{bmatrix};\quad k=1,2,\dots,n_k-1; \tag{67}$$

$$\overline{u}_i^{(k)}(x_2) = \left\{ u_i^{(k)}(x_1^{(p,q)}, x_2^{(p,q)}, x_3 \right\}_{\substack{p=1,2,\dots,N_1 \\ q=1,2,\dots,N_2}},\ i=1,2,3,\ x_3 \in (x_{3,k}^b, x_{3,k+1}^b); \tag{68}$$

$$A_k = \begin{bmatrix} 0 & E_k \\ A_{k,2,s}^{-1} \tilde{A}_{k,1,s} & A_{k,2,s}^{-1} \tilde{A}_{k,0,s} \end{bmatrix};\ \overline{\tilde{F}}_k = -\begin{bmatrix} 0 \\ A_{k,2,s}^{-1} \overline{b}_{k,s} \end{bmatrix};\ \overline{V}_k = -\begin{bmatrix} \overline{w}_k^{red} \\ \overline{t}_k^{red} \end{bmatrix};\ \overline{V}_k' = \partial_3\ \overline{V}_k; \tag{69}$$

$$A_{k,2,s} = S_k^T A_{k,vv} S_k;\ \tilde{A}_{k,1,s} = S_k^T \tilde{A}_{k,uv} S_k;\ A_{k,0,s} = S_k^T A_{k,uu} S_k;\ b_{k,s} = S_k^T b_k; \tag{70}$$

$$\overline{t}_k^{red} = \partial_3 \overline{w}_k^{red},\quad k=1,2,\dots,n_k;\ \overline{b}_k = K_{k,vv}^{-1} \overline{R}_{k,u}; \tag{71}$$

$$\tilde{B}_k^- = B_k^- S_{b,k},\quad k=2,\dots,n_k;\ \tilde{B}_k^+ = B_k^- S_{b,k},\ k=1,\dots,n_k-1; \tag{72}$$

A_k – матрица размером $2(N_{red,1}^{(k)} + N_{red,2}^{(k)} + N_{red,3}^{(k)}) \times$ $\times 2(N_{red,1}^{(k)} + N_{red,2}^{(k)} + N_{red,3}^{(k)})$; $\overline{V}_k$ и $\overline{\tilde{F}}_k$ - векторы размером

$2(N_{red,1}^{(k)}+N_{red,2}^{(k)}+N_{red,3}^{(k)})$; $\tilde{B}_k^-$ и $\tilde{B}_k^+$ – прямоугольные матрицы размером $6N_1N_2\times 2(N_{red,1}^{(k-1)}+N_{red,2}^{(k-1)}+N_{red,3}^{(k-1)})$ и $6N_1N_2\times 2(N_{red,1}^{(k)}+N_{red,2}^{(k)}+N_{red,3}^{(k)})$ соответственно.

Далее для точного аналитического решения многоточечных краевых задач строительной механики типа (63), (64) может быть использована методика, описанная во втором пункте настоящей статьи.

Замечание. Исследования проводились в рамках следующих работ:

1. Грант 7.1.7 Российской академии архитектуры и строительных наук «Разработка, исследование и верификация корректных численных методов решения геометрически, физически и конструктивно нелинейных задач деформирования, устойчивости и закритического поведения тонкостенных оболочечно-стержневых конструкций» на 2013-2015 гг.

2. Грант 7.1.8 Российской академии архитектуры и строительных наук «Разработка, исследование и верификация корректных многоуровневых численных и численно-аналитических методов локального расчета строительных конструкций на основе кратномасштабного вейвлет-анализа» на 2013-2015 гг.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Акимов П.А., Мозгалева М.Л.* Многоуровневые дискретные и дискретно-континуаль-ные методы локального расчета строительных конструкций. Монография. – М.: МГСУ, 2014. – 632 с.
2. *Деммель Дж.* Вычислительная линейная алгебра. Теория и приложения. – М.: Мир, 2001.– 430 с.
3. *Добеши И.* Десять лекций по вейвлетам. – Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2001. – 464 с.
4. *Зенкевич О.* Метод конечных элементов в технике. – М.: Мир, 1975. – 511 с.
5. *Золотов А.Б.* Постановка и алгоритмы численного решения краевых задач строитель-ной механики методом стандартной области: Дис. на соиск. уч. степ. д-ра техн. наук: 05.23.17. - М.: МИСИ им. В.В. Куйбышева, 1989. - 284 с.
6. *Золотов А.Б., Акимов П.А.* Некоторые аналитико-численные методы решения кра-евых задач строительной механики: Монография. – М.: Издательство АСВ, 2004. – 200 с.
7. *Золотов А.Б., Акимов П.А.* Практические методы расчета строительных конструк-ций. Численно-аналитические методы: Монография – М.: Издательство АСВ, 2006. – 208 с.
8. *Золотов А.Б., Акимов П.А., Мозгалева М.Л.* Многоуровневые дискретные и дискретно-континуальные реализации вариационно-разностного метода. Монография. – М.: АСВ, 2013. – 416 с.
9. *Золотов А.Б., Акимов П.А., Сидоров В.Н., Мозгалева М.Л.* Дискретно-континуальные методы расчета сооружений. Монография. – М.: Издательство «Архитектура-С», 2010. – 336 с.

10. *Золотов А.Б., Акимов П.А., Сидоров В.Н., Мозгалева М.Л.* Дискретно-континуальный метод конечных элементов. Приложения в строительстве. Монография. – М.: Издательство АСВ, 2010. – 336 с.
11. *Золотов А.Б., Акимов П.А., Сидоров В.Н., Мозгалева М.Л.* Дискретные и дискретно-континуальные реализации метода граничных интегральных уравнений. Монография. – М.: ФГБОУ ВПО «МГСУ», 2011. – 368 с.
12. *Золотов А.Б., Акимов П.А., Сидоров В.Н., Мозгалева М.Л.* Математические методы в строительной механике (с основами теории обобщенных функций). Монография. – М.: Издательство АСВ, 2008. – 336 с.
13. *Золотов А.Б., Акимов П.А., Сидоров В.Н., Мозгалева М.Л.* Численные и аналитические методы расчета строительных конструкций. Монография. – М.: Издательство АСВ, 2009. – 336 с.
14. *Костюченко А.Г., Оразов М.Б.* Задача о колебаниях упругого полуцилиндра и связанные с ней самосопряженные квадратичные пучки. // Труды семинара им. И.Г. Петровского, т. 6. – М.: Издательство МГУ, 1981, с. 97-146.
15. *Ланцош К.* Практические методы прикладного анализа. – М.: Гос. изд-во физ.-мат. лит-ры. 1961. – 524 с.
16. *Перельмутер А.В.* Беседы о строительной механике. - М.: Издательство SCAD Soft; Издательство АСВ, 2014. – 250 с.
17. *Перельмутер А.В., Сливкер В.И.* Расчетные модели сооружений и возможности их анализа. – Киев: Сталь, 2002. – 445 с.
18. *Постнов В.А.* Численные методы расчета судовых конструкций. – Л.: Судостроение, 1977. – 280 с.
19. *Федоренко Р.П.* Введение в вычислительную физику. – М.: Издательство Москов-ского физико-технического института, 1994. – 528 с.
20. *Хорн Р., Джонсон Ч.* Матричный анализ. – М.: Мир, 1989. – 655 с.
21. *Шкаликов А.А.* Задача об установившихся колебаниях трансверсально изотропного полуцилиндра со свободной границей. // Функциональный анализ и его приложения, 1991, т. 17, №2, с. 86-89.
22. *Шкаликов А.А.* К спектральной теории пучков операторов и разрешимости опера-торно-дифференциальных уравнений: Дис. на соискание уч. ст. докт. физ.-матем. наук. М.: МГУ, 1985.
23. *Шкаликов А.А.* Некоторые вопросы теории полиномиальных операторных пучков. // УМН, 1983, т. 38, №3.
24. *Шкаликов А.А.* Эллиптические уравнения в гильбертовом пространстве и спектраль-ные задачи, связанные с ними. // Труды семинара им. И.Г. Петровского. Т. 14. М.: Издательство МГУ, 1989. с. 140-224.
25. *Шкаликов А.А., Шкред А.В.* Задача об установившихся колебаниях трансверсально-изотропного полуцилиндра. // Математический сборник, 1991, т.182, №3, с. 1222-1246.
26. *Akimov P.A.* Correct Discrete-Continual Finite Element Method of Structural Analysis Based on Precise Analytical Solutions of Resulting Multipoint Boundary Problems for Sys-tems of Ordinary Differential Equations. // Applied Mechanics and Materials Vols. 204-208 (2012), pp. 4502-4505.
27. *Akimov P.A., Belostotskiy A.M., Mozgaleva M.L., Mojtaba Aslami, Negrozov O.A.* Correct Multilevel Discrete-Continual Finite Element Method of Structural Analysis. // Advanced Materials Research Vol. 1040 (2014), pp. 664-669.
28. *Akimov P.A., Mozgaleva M.L.* Correct Wavelet-based Multilevel Discrete-Continual Meth-ods for Local Solution of Boundary Problems of Structural Analysis. // Applied Mechanics and Materials Vols. 353-356 (2013), pp. 3224-3227.
29. *Burrus C.S., Gopinath R.A., Guo H.* Introduction to Wavelets and Wavelet Transforms. A Primer, Prentice-Hall, Inc., Upper Saddle River, NJ, 1998.

30. *Cheung Y.K., Tham L.G.* A review of the finite strip method. // Progress in Structural Engineering and Materials, Volume 2 Issue 3, 2000, pp. 369-375.
31. *Christov C.T., Petrova L.* Comparison of Some Variants of the Finite Strip Method for Analysis of Complex Shell Structures. // Proceedings of the IKM, Weimar, 2000, 6 pages.

Сведения об авторах

Акимов Павел Алексеевич, член-корреспондент Российской академии архитектуры и строи-тельных наук, доктор технических наук; главный ученый секретарь Российской академии архитектуры и строительных наук; заместитель генерального директора по научной работе ЗАО «Научно-исследовательский центр «СтаДиО»; заведующий кафедрой информатики и прикладной математики Московского государственного строительного университета, глав-ный научный сотрудник Научно-образовательного центра компьютерного моделирования уникальных зданий, сооружений и комплексов Московского государственного строительного университета; 129337, Россия, г. Москва, Ярославское шоссе, дом 26; тел. +7(499)183-59-94; e-mail: akimov@raasn.ru, pavel.akimov@gmail.com, akimov@mgsu.ru.

Мозгалева Марина Леонидовна, кандидат технических наук, профессор кафедры информа-тики и прикладной математики Московского государственного строительного универси-тета; 129337, Россия, г. Москва, Ярославское шоссе, дом 26; тел. +7(499)183-59-94; e-mail: marina.mozgaleva@gmail.com.

Моджтаба Аслами, аспирант кафедры информатики и прикладной математики Московского государственного строительного университета; 129337, Россия, г. Москва, Ярославское шоссе, дом 26; тел. +7(499)183-59-94; e-mail: aslami.mojtaba@gmail.com.

Негрозов Олег Александрович, аспирант кафедры информатики и прикладной математики Московского государственного строительного университета; инженер Научно-образовательного центра компьютерного моделирования уникальных зданий, сооружений и ком-плексов Московского государственного строительного университета; советник информа-ционно-аналитического отдела Российской академии архитектуры и строительных наук; 129337, Россия, г. Москва, Ярославское шоссе, дом 26; тел. +7(499)183-59-94; e-mail: genromgsu@gmail.com.