

УДК 539.3

## АНАЛІЗ НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНОГО СТАНУ ТОВСТОСТІННИХ АНІЗОТРОПНИХ ЦИЛІНДРИЧНИХ ОБОЛОНОК, СХИЛЬНИХ ДО ЛОКАЛЬНОГО ВПЛИВУ

**О.В. Марчук<sup>1</sup>**

д-р техн. наук, професор кафедри опору матеріалів і машинознавства

**О.О. Рассказов<sup>1</sup>**

д-р техн. наук, професор, завідувач кафедрою теоретичної та прикладної механіки

**С.В. Гнедаш<sup>1</sup>**

аспірант кафедри опору матеріалів і машинознавства

**С.А. Левківський<sup>1</sup>**

старший викладач кафедри дорожніх машин

<sup>1</sup>*Національний транспортний університет, м. Київ*

Побудовано два підходи до дослідження напружено-деформованого стану товстих анізотропних циліндричних оболонок. В першому підході для апроксимації шуканих функцій в плані і за товщиною використовуються поліноми. В другому для апроксимації шуканих функцій в плані застосовуються лінійні поліноми, а їх розподіл за товщиною знаходять на основі аналітичного розв'язку відповідної системи диференціальних рівнянь. Проведено аналіз напружено-деформованого стану оболонок в зоні локального навантаження.

**Ключові слова:** товсті шаруваті анізотропні циліндричні оболонки, локальні навантаження.

### Вступ

В даний час спостерігається зростання застосування пластикових волокнистих циліндрів в різних галузях техніки. Шари таких конструкцій володіють анізотропією властивостей. Вони схильні до локальних впливів з величиною плями навантаження сумірною з товщиною конструкції, що призводить до суттєво тривимірного напружено-деформованого стану з високими градієнтами його зміни. Це обумовлює необхідність розвитку відповідних підходів до розрахунку подібного роду конструкцій. Перелік робіт з розрахунку циліндричних оболонок можна знайти в оглядах [2-9, 13-15]. Робіт з розрахунку товстостінних оболонок великої кривизни з розміром площі навантаження сумірною з товщиною оболонки мало. Розраховувати такого типу оболонки дозволяють підходи, розроблені в [3, 4].

У даній статті представлені до розгляду два підходи, які дозволяють розглядати напружено-деформований стан товстостінних анізотропних оболонок великої кривизни в умовах осесиметричного згину.

## 1. Побудова кінцево-елементного підходу на основі поліноміальної апроксимації

Компоненти тензора деформацій циліндричної оболонки в умовах осесиметричної деформації визначаються на основі наступних співвідношень (вісь спрямована уздовж твірної оболонки):

$$\begin{aligned} e_{xx}^{(k)} &= \frac{\partial U_x^{(k)}}{\partial x}; \quad e_{\theta\theta}^{(k)} = \frac{1}{r} U_r^{(k)}; \quad e_{rr}^{(k)} = \frac{\partial U_r^{(k)}}{\partial r}; \quad 2e_{x\theta}^{(k)} = \frac{\partial U_\theta^{(k)}}{\partial x}; \\ 2e_{xr}^{(k)} &= \frac{\partial U_x^{(k)}}{\partial r} + \frac{\partial U_r^{(k)}}{\partial x}; \quad 2e_{r\theta}^{(k)} = \frac{\partial U_\theta^{(k)}}{\partial r} - \frac{1}{r} U_\theta^{(k)}. \end{aligned} \quad (1.1)$$

Напруження, з урахуванням виразів для деформації (1.1), записані на основі закону Гука.

$$\begin{aligned} \sigma_{xx}^{(k)} &= C_{11} \frac{\partial U_x^{(k)}}{\partial x} + C_{12} \frac{1}{r} U_r^{(k)} + C_{13} \frac{\partial U_r^{(k)}}{\partial r} + C_{16} \frac{\partial U_\theta^{(k)}}{\partial x}; \\ \sigma_{\theta\theta}^{(k)} &= C_{21} \frac{\partial U_x^{(k)}}{\partial x} + C_{22} \frac{1}{r} U_r^{(k)} + C_{23} \frac{\partial U_r^{(k)}}{\partial r} + C_{26} \frac{\partial U_\theta^{(k)}}{\partial x}; \\ \sigma_{rr}^{(k)} &= C_{31} \frac{\partial U_x^{(k)}}{\partial x} + C_{32} \frac{1}{r} U_r^{(k)} + C_{33} \frac{\partial U_r^{(k)}}{\partial r} + C_{36} \frac{\partial U_\theta^{(k)}}{\partial x}; \\ \sigma_{x\theta}^{(k)} &= C_{61} \frac{\partial U_x^{(k)}}{\partial x} + C_{62} \frac{1}{r} U_r^{(k)} + C_{63} \frac{\partial U_r^{(k)}}{\partial r} + C_{66} \frac{\partial U_\theta^{(k)}}{\partial x}; \\ \sigma_{xr}^{(k)} &= C_{55}^{(k)} \left( \frac{\partial U_x^{(k)}}{\partial r} + \frac{\partial U_r^{(k)}}{\partial x} \right) + C_{45}^{(k)} \left( \frac{\partial U_\theta^{(k)}}{\partial r} - \frac{1}{r} U_\theta^{(k)} \right); \\ \sigma_{r\theta}^{(k)} &= C_{54}^{(k)} \left( \frac{\partial U_x^{(k)}}{\partial r} + \frac{\partial U_r^{(k)}}{\partial x} \right) + C_{44}^{(k)} \left( \frac{\partial U_\theta^{(k)}}{\partial r} - \frac{1}{r} U_\theta^{(k)} \right). \end{aligned} \quad (1.2)$$

Використовуємо відому апроксимацію шуканих переміщень по товщині оболонки [10]:

$$\begin{aligned} U_x^{(k)}(x, r) &= U_{xl}^{(k)}(x) f_l^{(k)}(r) + \frac{\partial}{\partial x} W_p^{(k)}(x) \varphi_p^{(k)}(r); \\ U_\theta^{(k)}(x, r) &= U_{\theta l}^{(k)}(x) f_l^{(k)}(r); \\ U_r^{(k)}(x, r) &= W_p^{(k)}(x) \beta_p^{(k)}(r) \quad (l = 1, 2); \quad (p = 1, 2, 3), \end{aligned} \quad (1.3)$$

Тут  $U_{xl}^{(k)}(x)$ ,  $U_{x2}^{(k)}(x)$  - тангенціальні переміщення на лицьових поверхнях конструкції;  $U_{\theta 1}^{(k)}(x)$ ,  $U_{\theta 2}^{(k)}(x)$  - колові переміщення на лицьових поверхнях конструкції;  $W_1^{(k)}$ ,  $W_2^{(k)}$  - нормальні переміщення на лицьових поверхнях конструкції,  $W_3^{(k)}$  - функція зсуву;  $f_1^{(k)}(r)$ ,  $f_2^{(k)}(r)$ ,  $\beta_l^{(k)}(r)$ ,

$\beta_2^{(k)}(r)$  - задані поліноми першого ступеня;  $\varphi_1^{(k)}(r)$ ,  $\varphi_2^{(k)}(r)$ ,  $\beta_3^{(k)}(r)$  - другого ступеня;  $\varphi_3^{(k)}(r)$  - третього ступеня.

Варіація потенційної енергії деформації з урахуванням введеної апроксимації по товщині і відповідних перетворень набуває вигляду:

$$\begin{aligned}
 \delta\Pi = & \int_0^L \{ [D11_{il}^{(k)} \frac{\partial U_{xl}^{(k)}(x)}{\partial x} + (D12_{ip}^{(k)} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + D13_{ip}^{(k)} \frac{1}{r^{(k)}} + D14_{ip}^{(k)}) W_p^{(k)}(x) + \\
 & + D15_{il}^{(k)} \frac{\partial U_{\theta l}^{(k)}(x)}{\partial x} ] \delta \frac{\partial U_{xl}^{(k)}(x)}{\partial x} + [(T11_{il}^{(k)} + \frac{1}{r^{(k)}} T21_{il}^{(k)}) U_l^{(k)}(x) + \\
 & + (T12_{ip}^{(k)} + \frac{1}{r^{(k)}} T22_{ip}^{(k)}) \frac{\partial W_p^{(k)}(x)}{\partial x} + (T13_{il}^{(k)} + \frac{1}{r^{(k)}} T23_{il}^{(k)}) + \\
 & + \frac{1}{r^{(k)^2}} T14_{il}^{(k)}) U_{\theta l}^{(k)}(x) ] \delta U_{ix}^{(k)}(x) + [D21_{pl}^{(k)} \frac{\partial U_{xl}^{(k)}(x)}{\partial x} + (D22_{pp}^{(k)} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \\
 & + D23_{pp}^{(k)} \frac{1}{r^{(k)}} + D24_{pp}^{(k)}) W_p^{(k)}(x) + D25_{pl}^{(k)} \frac{\partial U_{\theta l}^{(k)}(x)}{\partial x} ] \delta \frac{\partial^2 W_p^{(k)}(x)}{\partial x^2} + \\
 & + [(T31_{pl}^{(k)} + \frac{1}{r^{(k)}} T41_{pl}^{(k)}) U_{xl}^{(k)}(x) + (T32_{pp}^{(k)} + \frac{1}{r^{(k)}} T42_{pp}^{(k)}) \frac{\partial W_p^{(k)}(x)}{\partial x} + \\
 & + (T33_{pl}^{(k)} + \frac{1}{r^{(k)}} T43_{pl}^{(k)} + \frac{1}{r^{(k)^2}} T44_{pl}^{(k)}) U_{\theta l}^{(k)}(x) ] \delta \frac{\partial W_p^{(k)}(x)}{\partial x} + \\
 & + [(D31_{pl}^{(k)} + \frac{1}{r^{(k)}} D41_{pl}^{(k)}) \frac{\partial U_{xl}^{(k)}(x)}{\partial x} + ((D32_{pp}^{(k)} + \frac{1}{r^{(k)}} D42_{pp}^{(k)}) \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \\
 & + (D33_{pp}^{(k)} \frac{1}{r^{(k)}} + D43_{pp}^{(k)} \frac{1}{r^{(k)^2}} + (D34_{pp}^{(k)} + \frac{1}{r^{(k)}} D44_{pp}^{(k)})) W_p^{(k)}(x) + \\
 & + (D35_{pl}^{(k)} + \frac{1}{r^{(k)}} D45_{pl}^{(k)}) \frac{\partial U_{\theta l}^{(k)}(x)}{\partial x} ] \delta W_p^{(k)}(x) + [D51_{il}^{(k)} \frac{\partial U_{xl}^{(k)}(x)}{\partial x} + \\
 & + (D52_{ip}^{(k)} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + D53_{ip}^{(k)} \frac{1}{r^{(k)}} + D54_{ip}^{(k)}) W_p^{(k)}(x) + D55_{il}^{(k)} \frac{\partial U_{\theta l}^{(k)}(x)}{\partial x} ] \delta \frac{\partial U_{\theta l}^{(k)}(x)}{\partial x} + \\
 & + [(T51_{il}^{(k)} + \frac{1}{r^{(k)}} T61_{il}^{(k)}) U_{xl}^{(k)}(x) + (T52_{ip}^{(k)} + \frac{1}{r^{(k)}} T62_{ip}^{(k)}) \frac{\partial W_p^{(k)}(x)}{\partial x} + \\
 & + (T53_{il}^{(k)} + \frac{1}{r^{(k)}} T63_{il}^{(k)} + \frac{1}{r^{(k)^2}} T54_{il}^{(k)}) U_{\theta l}^{(k)}(x) ] \delta U_{\theta l}^{(k)}(x). \tag{1.4}
 \end{aligned}$$

( $l=1,2$ ); ( $p=1,2,3$ ),  $L$  - довжина оболонки;  $a_{k-1}$ ,  $a_k$  - координати зовнішніх поверхонь  $k$  - тої складової оболонки по вісі  $r$ .

Варіація роботи зовнішнього навантаження на лицьових поверхнях шару може бути записана наступним чином:

$$\delta A = \int_0^L (q_{xl}^{(k)}(x) \delta U_{xl}^{(k)}(x) + q_{ip}^{(k)}(x) \delta W_p^{(k)}(x) + q_{\theta l}^{(k)}(x) \delta U_{\theta l}^{(k)}(x)) dx, \quad (1.5)$$

де  $q_{r3}^{(k)}(x) = 0$ .

Шукані функції в плані конструкції лінійними і кубічними поліномами.

$$\begin{aligned} U_{xl}^{(k)}(x) &= U_{xl1}^{(k)} f_{u1}(x) + U_{xl2}^{(k)} f_{u2}(x); \\ U_{\theta l}^{(k)}(x) &= U_{\theta l1}^{(k)} f_{u1}(x) + U_{\theta l2}^{(k)} f_{u2}(x); \\ W_p^{(k)}(x) &= W_{p1}^{(k)} f_{w1}(x) + \alpha_{p1}^{(k)} f_{w2}(x) + W_{p2}^{(k)} f_{w3}(x) + \alpha_{p2}^{(k)} f_{w4}(x), \end{aligned} \quad (1.6)$$

де  $f_{u1}(x) = 1 - x/a$ ;  $f_{u2}(x) = x/a$ .

$$f_{w1}(x) = \frac{2x^3 - 2ax^2 + a^3}{a^3}; \quad f_{w2}(x) = \frac{x^3 - 2ax^2 + a^2x}{a^2}; \quad f_{w3}(x) = \frac{-2x^3 + 3ax^2}{a^3};$$

$$f_{w4}(x) = \frac{x^3 - ax^2}{a^2}, \quad a - \text{довжина кінцевого елемента.}$$

Рівняння рівноваги кінцевого елемента отримуємо на основі варіаційного рівняння Лагранжа.

$$\delta \Pi - \delta A = 0. \quad (1.7)$$

З урахуванням введеної апроксимації вони приймають такий вигляд:

$$\begin{aligned} & \int_0^a \{ [D11_{ll}^{(k)} \frac{\partial f_{us}(x)}{\partial x} \frac{\partial f_{u\bar{s}}(x)}{\partial x} + (T11_{ll}^{(k)} + \frac{1}{r^{(k)}} T21_{ll}^{(k)}) f_{us}(x) f_{u\bar{s}}(x) U_{xls}^{(k)} + \\ & + (((D12_{lp}^{(k)} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + D13_{lp}^{(k)} \frac{1}{r^{(k)}} + D14_{lp}^{(k)}) f_{w\bar{c}}(x)) \frac{\partial f_{u\bar{s}}(x)}{\partial x} + (T12_{lp}^{(k)} + \\ & + \frac{1}{r^{(k)}} T22_{lp}^{(k)}) \frac{\partial f_{w\bar{c}}(x)}{\partial x} f_{u\bar{s}}(x) W_{pc}^{(k)} + (D15_{ll}^{(k)} \frac{\partial f_{us}(x)}{\partial x} \frac{\partial f_{u\bar{s}}(x)}{\partial x} + \\ & + (T13_{ll}^{(k)} + \frac{1}{r^{(k)}} T23_{ll}^{(k)} + \frac{1}{r^{(k)^2}} T14_{ll}^{(k)}) f_{us}(x) f_{u\bar{s}}(x) ] U_{\theta ls}^{(k)} - \\ & - q_{xl}^{(k)}(x) f_{u\bar{s}}(x) ] \delta U_{xl\bar{s}}^{(k)} + (D21_{p\bar{l}}^{(k)} \frac{\partial f_{us}(x)}{\partial x} \frac{\partial^2 f_{w\bar{c}}(x)}{\partial x^2} + (T31_{p\bar{l}}^{(k)} + \\ & + \frac{1}{r^{(k)}} T41_{p\bar{l}}^{(k)}) f_{us}(x) \frac{\partial f_{w\bar{c}}(x)}{\partial x} ] U_{xls}^{(k)} + (((D22_{pp}^{(k)} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + D23_{pp}^{(k)} \frac{1}{r^{(k)}} + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +D24_{\overline{pp}}^{(k)} f_{wc}(x) \frac{\partial^2 f_{w\bar{c}}(x)}{\partial x^2} + \left( (D32_{\overline{pp}}^{(k)} + \frac{1}{r^{(k)}} D42_{\overline{pp}}^{(k)}) \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \right. \\
& + (D33_{\overline{pp}}^{(k)} \frac{1}{r^{(k)}} + D43_{\overline{pp}}^{(k)} \frac{1}{r^{(k)^2}} + (D34_{\overline{pp}}^{(k)} + \frac{1}{r^{(k)}} D44_{\overline{pp}}^{(k)}) f_{wc}(x) f_{w\bar{c}}(x) + \\
& + (T32_{\overline{pp}}^{(k)} + \frac{1}{r^{(k)}} T42_{\overline{pp}}^{(k)}) \frac{\partial f_{wc}(x)}{\partial x} \frac{\partial f_{w\bar{c}}(x)}{\partial x} \Big) W_{pc}^{(k)} + \\
& + \left[ (D25_{\overline{pl}}^{(k)} \frac{\partial f_{us}(x)}{\partial x} \frac{\partial^2 f_{w\bar{c}}(x)}{\partial x^2} + (D35_{\overline{pl}}^{(k)} + \frac{1}{r^{(k)}} D45_{\overline{pl}}^{(k)}) \frac{\partial f_{us}(x)}{\partial x} f_{w\bar{c}}(x) + \right. \\
& + (T33_{\overline{pl}}^{(k)} + \frac{1}{r^{(k)}} T43_{\overline{pl}}^{(k)} + \frac{1}{r^{(k)^2}} T44_{\overline{pl}}^{(k)}) f_{us}(x) \frac{\partial f_{w\bar{c}}(x)}{\partial x} \Big] U_{\theta ls}^{(k)} - \\
& - q_{\overline{ip}}^{(k)}(x) f_{w\bar{c}}(x) \delta W_{\overline{pc}}^{(k)} + \left[ (D51_{\overline{il}}^{(k)} \frac{\partial f_{us}(x)}{\partial x} \frac{\partial f_{u\bar{s}}(x)}{\partial x} + T51_{\overline{il}}^{(k)} + \right. \\
& + \frac{1}{r^{(k)}} T61_{\overline{il}}^{(k)}) f_{us}(x) f_{u\bar{s}}(x) U_{xls}^{(k)} + \left( (D52_{\overline{ip}}^{(k)} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + D53_{\overline{ip}}^{(k)} \frac{1}{r^{(k)}} + \right. \\
& + D54_{\overline{ip}}^{(k)}) f_{wc}(x) \frac{\partial f_{u\bar{s}}(x)}{\partial x} + (T52_{\overline{ip}}^{(k)} + \frac{1}{r^{(k)}} T62_{\overline{ip}}^{(k)}) \frac{\partial f_{wc}(x)}{\partial x} f_{u\bar{s}}(x) \Big) W_{pc}^{(k)} + \\
& + D55_{\overline{il}}^{(k)} \frac{\partial f_{us}(x)}{\partial x} \frac{\partial f_{u\bar{s}}(x)}{\partial x} + (T53_{\overline{il}}^{(k)} + \frac{1}{r^{(k)}} T63_{\overline{il}}^{(k)} + \\
& + \frac{1}{r^{(k)^2}} T54_{\overline{il}}^{(k)}) f_{us}(x) f_{u\bar{s}}(x) U_{\theta ls}^{(k)} - q_{\overline{ol}}^{(k)}(x) f_{u\bar{s}}(x) \delta U_{\overline{\theta s}}^{(k)} \Big] dx = 0. \quad (1.8)
\end{aligned}$$

Тут  $W_{p1}^{(k)} = W_{p1}^{(k)}$ ;  $W_{p2}^{(k)} = \alpha_{p1}^{(k)}$ ;  $W_{p3}^{(k)} = W_{p2}^{(k)}$ ;  $W_{p4}^{(k)} = \alpha_{p2}^{(k)}$ .

## 2. Побудова підходу на основі напіваналітичного методу скінченних елементів

Найбільш повний огляд по напіваналітичному методу скінченних елементів представлений в [1]. У переважній більшості розглянутих робіт по одній з координат використовується розкладання в ряди, за іншими координатами використовується традиційна кінцево-елементна апроксимація. У даній роботі представлений дещо інший підхід.

Рівняння рівноваги  $k$ - того анізотропного шару оболонки в змішаній формі мають вигляд [3]:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial U_x^{(k)}}{\partial r} + \frac{\partial U_r^{(k)}}{\partial x} - B_{55}^{(k)} \sigma_{xr} - B_{54}^{(k)} \sigma_{r\theta} &= 0; \\
B_{13}^{(k)} \frac{\partial U_x^{(k)}}{\partial x} + \frac{\partial U_r^{(k)}}{\partial r} + B_{23}^{(k)} \frac{1}{r} U_r^{(k)} + B_{63}^{(k)} \frac{\partial U_\theta^{(k)}}{\partial x} - B_{33}^{(k)} \sigma_{rr} &= 0;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial U_r^{(k)}}{\partial r} - \frac{1}{r} U_r^{(k)} - B_{45}^{(k)} \sigma_{xr}^{(k)} - B_{44}^{(k)} \sigma_{r\theta}^{(k)} = 0; \\
& B_{11}^{(k)} \frac{\partial^2 U_x^{(k)}}{\partial x^2} + B_{12}^{(k)} \frac{1}{r} \frac{\partial U_r^{(k)}}{\partial x} + B_{16}^{(k)} \frac{\partial^2 U_\theta^{(k)}}{\partial x^2} + \frac{\partial \sigma_{xr}^{(k)}}{\partial r} + \frac{1}{r} \sigma_{xr}^{(k)} + B_{13}^{(k)} \frac{\partial \sigma_{rr}^{(k)}}{\partial x} = 0; \\
& B_{21}^{(k)} \frac{1}{r} \frac{\partial U_x^{(k)}}{\partial x} + B_{22}^{(k)} \frac{1}{r^2} U_r^{(k)} + B_{26}^{(k)} \frac{1}{r} \frac{\partial U_x^{(k)}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xr}^{(k)}}{\partial x} \frac{\partial \sigma_{rr}^{(k)}}{\partial r} + B_{23}^{(k)} \frac{1}{r} \sigma_{rr}^{(k)} - \frac{1}{r} \sigma_{rr}^{(k)} = 0; \\
& B_{16}^{(k)} \frac{\partial^2 U_x^{(k)}}{\partial x^2} + B_{26}^{(k)} \frac{1}{r} \frac{\partial U_r^{(k)}}{\partial x} + B_{66}^{(k)} \frac{\partial^2 U_\theta^{(k)}}{\partial x^2} + B_{36}^{(k)} \frac{\partial \sigma_{rr}^{(k)}}{\partial x} \frac{\partial \sigma_{r\theta}^{(k)}}{\partial r} + \frac{2}{r} \sigma_{r\theta}^{(k)} = 0, \tag{2.1}
\end{aligned}$$

де зміст жорсткісної характеристики  $B_{ij}^{(k)}$  розкривається в наступному взаємозв'язку напружень і деформацій:

$$\begin{aligned}
\sigma_{xx}^{(k)} &= B_{11}^{(k)} e_{xx}^{(k)} + B_{12}^{(k)} e_{\theta\theta}^{(k)} + B_{13}^{(k)} e_{rr}^{(k)} + B_{16}^{(k)} 2e_{x\theta}^{(k)}; \\
\sigma_{\theta\theta}^{(k)} &= B_{21}^{(k)} e_{xx}^{(k)} + B_{22}^{(k)} e_{\theta\theta}^{(k)} + B_{23}^{(k)} e_{rr}^{(k)} + B_{26}^{(k)} 2e_{x\theta}^{(k)}; \\
\sigma_{x\theta}^{(k)} &= B_{61}^{(k)} e_{xx}^{(k)} + B_{62}^{(k)} e_{\theta\theta}^{(k)} + B_{63}^{(k)} e_{rr}^{(k)} + B_{66}^{(k)} 2e_{x\theta}^{(k)}; \\
B_{33}^{(k)} \sigma_{rr}^{(k)} &= B_{13}^{(k)} e_{xx}^{(k)} + B_{23}^{(k)} e_{\theta\theta}^{(k)} + e_{rr}^{(k)} + B_{36}^{(k)} 2e_{x\theta}^{(k)}; \\
e_{r\theta}^{(k)} &= B_{44}^{(k)} \sigma_{r\theta}^{(k)} + B_{45}^{(k)} \sigma_{xr}^{(k)}; \\
e_{xr}^{(k)} &= B_{54}^{(k)} \sigma_{r\theta}^{(k)} + B_{55}^{(k)} \sigma_{xr}^{(k)}.
\end{aligned}$$

Подовжні і колові напруження знаходимо із закону Гука:

$$\begin{aligned}
\sigma_{xx}^{(k)} &= B_{11}^{(k)} \frac{\partial U_x^{(k)}}{\partial x} + B_{12}^{(k)} \frac{1}{r} U_r^{(k)} + B_{13}^{(k)} \sigma_{rr}^{(k)} + B_{16}^{(k)} \frac{\partial U_\theta^{(k)}}{\partial x}; \\
\sigma_{\theta\theta}^{(k)} &= B_{21}^{(k)} \frac{\partial U_x^{(k)}}{\partial x} + B_{22}^{(k)} \frac{1}{r} U_r^{(k)} + B_{23}^{(k)} \sigma_{rr}^{(k)} + B_{26}^{(k)} \frac{\partial U_\theta^{(k)}}{\partial x}. \tag{2.2}
\end{aligned}$$

Введемо наступну апроксимацію шуканих функцій переміщень і напружень в плані кінцевого елемента [10]:

$$\begin{aligned}
U_x^{(k)}(x, r) &= \varphi_1(x) v_{x1}^{(k)}(r) + \varphi_2(x) v_{x2}^{(k)}(r); \\
U_\theta^{(k)}(x, r) &= \varphi_1(x) v_{\theta 1}^{(k)}(r) + \varphi_2(x) v_{\theta 2}^{(k)}(r); \\
U_r^{(k)}(x, r) &= \varphi_1(x) w_1^{(k)}(r) + \varphi_2(x) w_2^{(k)}(r); \\
\sigma_{xr}^{(k)}(x, r) &= \varphi_1(x) \tau_{x1}^{(k)}(r) + \varphi_2(x) \tau_{x2}^{(k)}(r); \\
\sigma_{\theta r}^{(k)}(x, r) &= \varphi_1(x) \tau_{\theta 1}^{(k)}(r) + \varphi_2(x) \tau_{\theta 2}^{(k)}(r); \\
\sigma_{rr}^{(k)}(x, r) &= \varphi_1(x) \sigma_1^{(k)}(r) + \varphi_2(x) \sigma_2^{(k)}(r), \tag{2.3}
\end{aligned}$$

де  $\varphi_1(x) = 1 - x/a$ ;  $\varphi_2(x) = x/a$ ;  $a$  - довжина кінцевого елемента;  
 $v_{xi}^{(k)}(r)$ ,  $v_{\theta i}^{(k)}(r)$ ,  $w_i^{(k)}(r)$ ,  $\tau_{xi}^{(k)}(r)$ ,  $\tau_{\theta i}^{(k)}(r)$ ,  $\sigma_i^{(k)}(r)$  - шукані функції розподілу переміщень і напружень в  $i$ -тому вузлі (координата  $x$  спрямована уздовж оболонки).

Відома процедура Бубнова-Гальоркіна з використанням формули Гріна дозволяє отримати рівняння рівноваги кінцевого елемента.

$$\left[ \begin{array}{cccccc} 0 & -k_{01} & 0 & B_{55}^{(k)} k_{00} & 0 & B_{45}^{(k)} k_{00} \\ -B_{13}^{(k)} k_{01} & -\frac{1}{r^{(k)}} B_{23}^{(k)} k_{00} & -k_{01} B_{36}^{(k)} & 0 & k_{00} B_{33}^{(k)} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{r^{(k)}} k_{00} & B_{45}^{(k)} k_{00} & 0 & B_{44}^{(k)} k_{00} \\ B_{11}^{(k)} k_{11} & \frac{1}{r^{(k)}} B_{12}^{(k)} k_{10} & B_{16}^{(k)} k_{11} & -\frac{1}{r^{(k)}} k_{00} & B_{13}^{(k)} k_{10} & 0 \\ \frac{1}{r^{(k)}} B_{21}^{(k)} k_{01} & \frac{1}{(r^{(k)})^2} B_{21}^{(k)} k_{00} & \frac{1}{r^{(k)}} B_{26}^{(k)} k_{01} & k_{10} & \frac{1}{r^{(k)}} (B_{1r}^{(k)} - 1) k_{00} & 0 \\ B_{16}^{(k)} k_{11} & \frac{1}{r^{(k)}} B_{26}^{(k)} k_{10} & B_{66}^{(k)} k_{11} & 0 & B_{36}^{(k)} k_{10} & -\frac{2}{r^{(k)}} k_{00} \end{array} \right] \cdot \left[ \begin{array}{cccccc} k_{00,r} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_{00,r} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_{00,r} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k_{00,r} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & k_{00,r} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & k_{00,r} \end{array} \right] \left[ \begin{array}{c} v_x^{(k)}(r) \\ v_{\theta}^{(k)}(r) \\ w^{(k)}(r) \\ \tau_x^{(k)}(r) \\ \tau_{\theta}^{(k)}(r) \\ \sigma^{(k)}(r) \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right] \quad (2.4)$$

Тут  $k_{00} = \begin{bmatrix} a/3 & a/6 \\ a/6 & a/3 \end{bmatrix}$ ;  $k_{10} = \begin{bmatrix} -1/2 & -1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$ ;  $k_{11} = \begin{bmatrix} 1/a & -1/a \\ -1/a & 1/a \end{bmatrix}$ ;

$k_{01} = k_{10}^T$ ;  $v_x^{(k)T} = \{v_{x1}^{(k)}(r), v_{x2}^{(k)}(r)\}$ ;  $v_{\theta}^{(k)T} = \{v_{\theta1}^{(k)}(r), v_{\theta2}^{(k)}(r)\}$ ;

$w^{(k)T} = \{w_1^{(k)}(r), w_2^{(k)}(r)\}$ ;  $\tau_x^{(k)T} = \{\tau_{x1}^{(k)}(r), \tau_{x2}^{(k)}(r)\}$ ;

$\tau_{\theta}^{(k)T} = \{\tau_{\theta1}^{(k)}(r), \tau_{\theta2}^{(k)}(r)\}$ ;  $\sigma^{(k)T} = \{\sigma_1^{(k)}(r), \sigma_2^{(k)}(r)\}$ .

Далі формуємо роздільну систему диференціальних рівнянь для шару з урахуванням кінематичних граничних умов на контурі оболонки.

$$\begin{pmatrix}
 0 & -K_{01} & 0 & B_{35}^{(k)} K_{00} & 0 & B_{45}^{(k)} K_{00} \\
 -B_{13}^{(k)} K_{01} & -\frac{1}{r^{(k)}} B_{23}^{(k)} K_{00} & -B_{36}^{(k)} K_{01} & 0 & B_{33}^{(k)} K_{00} & 0 \\
 0 & 0 & \frac{1}{r^{(k)}} K_{00} & B_{15}^{(k)} K_{00} & 0 & B_{44}^{(k)} K_{00} \\
 B_{11}^{(k)} K_{11} & \frac{1}{r^{(k)}} B_{12}^{(k)} K_{10} & B_{16}^{(k)} K_{11} & -\frac{1}{r^{(k)}} K_{00} & B_{13}^{(k)} K_{10} & 0 \\
 \frac{1}{r^{(k)}} B_{21}^{(k)} K_{01} & \frac{1}{(r^{(k)})^2} B_{21}^{(k)} K_{00} & \frac{1}{r^{(k)}} B_{26}^{(k)} K_{01} & K_{10} & \frac{1}{r^{(k)}} (B_{1r}^{(k)} - 1) K_{00} & 0 \\
 B_{16}^{(k)} K_{11} & \frac{1}{r^{(k)}} B_{26}^{(k)} K_{10} & B_{66}^{(k)} K_{11} & 0 & B_{36}^{(k)} K_{10} & -\frac{2}{r^{(k)}} K_{00}
 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} K_{00,r} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & K_{00,r} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & K_{00,r} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & K_{00,r} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & K_{00,r} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & K_{00,r} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \left\{ v_x^{(k)}(r) \right\} \\ \left\{ v_\theta^{(k)}(r) \right\} \\ \left\{ w^{(k)}(r) \right\} \\ \left\{ \tau_x^{(k)}(r) \right\} \\ \left\{ \tau_\theta^{(k)}(r) \right\} \\ \left\{ \sigma^{(k)}(r) \right\} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (2.5)$$

Тут  $\left\{ v_{xi1}^{(k)}(r) \right\}^T = \left\{ \dots, v_{xi1}^{(k)}(r), \dots \right\}$ ;  $\left\{ v_{\theta 2}^{(k)}(r) \right\}^T = \left\{ \dots, v_{\theta 2}^{(k)}(r), \dots \right\}$ ;  
 $\left\{ w_{i3}^{(k)}(r) \right\}^T = \left\{ \dots, w_{i3}^{(k)}(r), \dots \right\}$ ;  $\left\{ \tau_{xi4}^{(k)}(r) \right\}^T = \left\{ \dots, \tau_{xi4}^{(k)}(r), \dots \right\}$ ;  
 $\left\{ \tau_{\theta 5}^{(k)}(r) \right\}^T = \left\{ \dots, \tau_{\theta 5}^{(k)}(r), \dots \right\}$ ;  $\left\{ \sigma_{i6}^{(k)}(r) \right\}^T = \left\{ \dots, \sigma_{i6}^{(k)}(r), \dots \right\}$ .

де  $i$  - номер точки, в якій визначаються шукані функції.

Вектор шуканих функцій може бути представлений таким чином:

$$\begin{pmatrix} \left\{ v_{xi1}^{(k)} \right\} \\ \left\{ v_{\theta 2}^{(k)} \right\} \\ \left\{ w_{i3}^{(k)} \right\} \\ \left\{ \tau_{xi4}^{(k)} \right\} \\ \left\{ \tau_{\theta 5}^{(k)} \right\} \\ \left\{ \sigma_{i6}^{(k)} \right\} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu_{i1}^{(k)}(1) & \dots & \mu_{i1}^{(k)}(j) & \dots & \mu_{i1}^{(k)}(J) \\ \mu_{i2}^{(k)}(1) & \dots & \mu_{i2}^{(k)}(j) & \dots & \mu_{i2}^{(k)}(J) \\ \mu_{i3}^{(k)}(1) & \dots & \mu_{i3}^{(k)}(j) & \dots & \mu_{i3}^{(k)}(J) \\ \mu_{i4}^{(k)}(1) & \dots & \mu_{i4}^{(k)}(j) & \dots & \mu_{i4}^{(k)}(J) \\ \mu_{i5}^{(k)}(1) & \dots & \mu_{i5}^{(k)}(j) & \dots & \mu_{i5}^{(k)}(J) \\ \mu_{i6}^{(k)}(1) & \dots & \mu_{i6}^{(k)}(j) & \dots & \mu_{i6}^{(k)}(J) \end{pmatrix} \left[ C^{(k)} \right] \quad (2.6)$$

де  $\left[ C^{(k)} \right]^T = \left[ C_1^{(k)} e^{r\beta_1^{(k)}}, \dots, C_j^{(k)} e^{r\beta_j^{(k)}}, \dots, C_j^{(k)} e^{r\beta_j^{(k)}} \right]$ ;  $\beta_j^{(k)}$  - корені характеристичного рівняння роздільної системи диференціальних рівнянь, які можуть бути комплексними;  $\mu_{i1}^{(k)}(j)$ ,  $\mu_{i2}^{(k)}(j)$ ,  $\mu_{i3}^{(k)}(j)$ ,  $\mu_{i4}^{(k)}(j)$ ,  $\mu_{i5}^{(k)}(j)$ ,  $\mu_{i6}^{(k)}(j)$  - її власні вектора;  $C_j^{(k)}$  - постійні інтегрування, які визначаються з умов контакту шарів і умов на лицьових поверхнях в кожному вузлі сітки розбиття конструкції на кінцеві елементи;  $J$  - загальна кількість шуканих функцій в шарі.



### 3. Результати числових досліджень

Як приклад розрахунку розглянемо чотиришарову анізотропну оболонку з наступними фізико-механічними характеристиками (Рис. 1):  $E_x^{(i)} / E_\theta^{(i)} = 25 / 1$ ;  $E_\theta^{(i)} = E_r^{(i)}$ ;  $G_{x\theta}^{(i)} / E_r^{(i)} = 0,5 / 1$ ;  $G_{\theta r}^{(i)} / E_r^{(i)} = 0,2 / 1$ ;  $G_{xr}^{(i)} = G_{x\theta}^{(i)}$ ;  $\nu_{x\theta}^{(i)} = \nu_{xr}^{(i)} = \nu_{\theta r}^{(i)} = 0,25$ ;  $L / h = 10$ ;  $h / R = 1 / 10$ . Шари по чергово повернуті на  $45^\circ$ ;  $-45^\circ$ ;  $45^\circ$ ;  $-45^\circ$ . На торцях оболонки заборонені вертикальні переміщення  $U_r = 0$ . Розглядалася половина оболонки, яка

ділилася на 100 елементів. Результати розрахунку ( $\bar{U}_r = U_r E / q_{31}$ ;

$\bar{\sigma}_{xx} = \sigma_{xx} / q_{31}$ ;  $\bar{\sigma}_{\theta\theta} = \sigma_{\theta\theta} / q_{31}$ ;  $\bar{\sigma}_{rr} = \sigma_{rr} / q_{31}$ ) на зовнішніх поверхнях шарів для синусоїдального навантаження, що прикладається на внутрішній поверхні оболонки, наведені в табл. 1. Напруження  $\sigma_{rr}$  по моделі М1 отримані з рівнянь (1.8), як контактні (вузлові навантаження на рівні

контакту ділилися на довжину елемента). Розрахункові величини  $\bar{U}_r$ ,

$\bar{\sigma}_{xx}$ ,  $\bar{\sigma}_{\theta\theta}$ ,  $\bar{\sigma}_{rr}$  наведені в центрі оболонки.

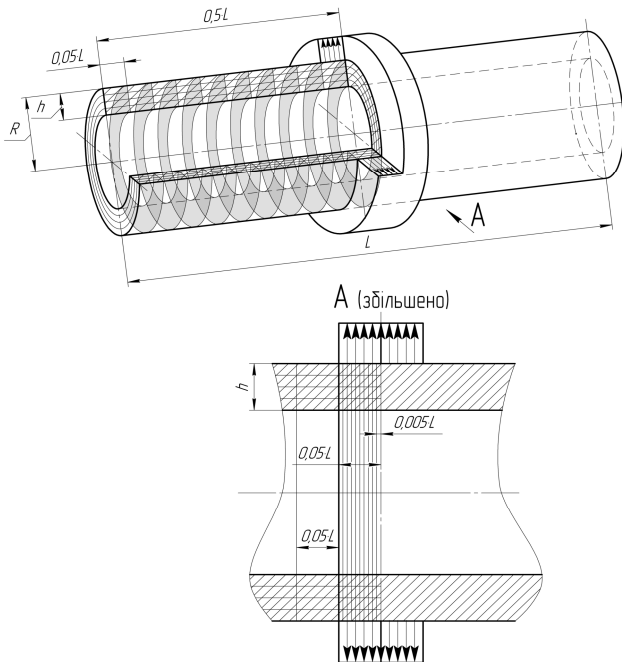


Рис. 1

Таблиця 1

$\bar{U}_r$		$\bar{\sigma}_{xx}$		$\bar{\sigma}_{\theta\theta}$		$\bar{\sigma}_{rr}$	
M1	M2	M1	M2	M1	M2	M1	M2
43.83	43.95	-9.741	-9.777	0.4574	0.4558	-1.000	-1.000
43.65	43.76	-3.257	-3.235	5.8076	5.8506	-0.866	-0.869
43.65	43.76	-7.766	-7.779	1.2981	1.3060	-0.866	-0.869
43.45	43.56	-1.791	-1.799	6.2626	6.2754	-0.697	-0.696
43.45	43.56	1.784	1.797	9.8381	9.8724	-0.697	-0.696
43.25	43.37	8.125	8.183	15.213	15.284	-0.317	-0.319
43.25	43.37	2.564	2.624	9.6518	9.7242	-0.317	-0.319
43.09	43.21	8.867	8.934	14.805	14.884	0.000	0.000

У табл. 2 представлені результати розрахунку розглянутої вище оболонки, але навантаженої рівномірним локальним навантаженням в центрі оболонки на зовнішній поверхні. Половина оболонки ділилася на 100 елементів. Рівномірно-розподіленим нормальним навантаженням навантажено десять елементів в центрі оболонки, тобто зона навантаження дорівнює товщині оболонки.

Таблиця 2

$\bar{U}_r$		$\bar{\sigma}_{xx}$		$\bar{\sigma}_{\theta\theta}$		$\bar{\sigma}_{rr}$	
M1	M2	M1	M2	M1	M2	M1	M2
11.43	11.45	-5.367	-5.415	-2.094	-2.132	0.000	0.000
11.47	11.49	-0.402	-0.401	2.096	2.103	0.151	0.151
11.47	11.49	-3.937	-3.968	-1.439	-1.464	0.151	0.151
11.54	11.55	0.095	0.099	2.278	2.286	0.421	0.422
11.54	11.55	-0.389	-0.396	1.794	1.791	0.421	0.422
11.66	11.67	4.186	4.221	6.054	6.088	0.778	0.778
11.66	11.67	-0.204	-0.198	1.664	1.670	0.778	0.778
11.81	11.83	5.861	5.892	6.783	6.811	1.000	1.000

На відміну від попереднього прикладу при розрахунку по моделі M1, коли кожен шар розглядався в рамках одного підшару, необхідну точність при розрахунку напружень  $\bar{\sigma}_{xx}$  та  $\bar{\sigma}_{\theta\theta}$  забезпечити не вдалося через високі градієнти зміни напружено-деформованого стану в зоні локальних навантажень. Розподіл кожного шару на чотири підшари забезпечує необхідну точність. При розрахунку по моделі M2 в такому розподілі немає необхідності, тому що в цьому випадку розподіл шуканих функцій по товщині оболонки знаходиться на підставі точного рішення системи (2.5).

## Висновок

У даній статті розроблено два підходи до дослідження напружено-деформованого стану товстостінних анізотропних циліндричних оболонок під впливом локальних навантажень. Обидва походи засновані на поділі циліндричної оболонки по товщині концентричними поверхнями на ряд складових циліндричних оболонок, досить тонких, щоб можна було знехтувати зміною їх кривизни по товщині. Задовольняючи умовами контакту на зовнішніх поверхнях між складовими оболонками, описуємо напружено-деформований стан вихідної оболонки, з дискретним урахуванням зміни кривизни по товщині. У першому підході для апроксимації шуканих функцій і по товщині, і в плані залучаються поліноми. У другому для апроксимації шуканих функцій в плані використовуються поліноми, а їх розподіл по товщині конструкції розшукується на основі аналітичного рішення відповідної системи диференціальних рівнянь. Обидва підходи незалежні від похибки апроксимації та арифметичних обчислень. Розгляд дослідницьких завдань двома методами служить додатковим обґрунтуванням достовірності отриманих результатів розрахунку.

## СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Баженов В.А., Гуляр А.І., Сахаров А.С., Топор А.Г.* Напіваналітичний метод кінцевих елементів в механіці деформівних тіл // К.: НДІ см.-1993. - 376 с.
2. *Bakaiyan H., Hosseini H., and Ameri E.* Analis of multi-layered filament-wound composite pipes under combined integral pressure and thermo-mechanical loading witch thermal variations // Compos. Struct. - 2009.- 88.- P. 532 - 541.
3. *Григоренко Я.М., Василенко А.Т., Панкратова Н.Д.* Задачі теорії пружності неоднорідних тел.- К.: Наукова думка, 1991.- 216 с.
4. *Григоренко Я.М., Влайков Г.Г., Григоренко А.Я.* Чисельно-аналітичне рішення задач механіки оболонок на основі різних моделей. -К.: Академперіодика, 2006. - 472 с.
5. *Grigorenko, Ya., M., Yaremchenko, S., N.:* Refined analysis of the stress state of orthotropic elliptic cylindrical shells with variable geometrical parameters // Int. Appl. Mech.-2008.- 40, N9.- P. 998-1005.
6. *Grigorenko, Ya., M., Grigorenko, A., Ya., Zakhariychenko, L., I.:* Study of effect of the geometrical parameters on the stress state of cylindrical shells with corrugated lipticcross-section // Int. Appl. Mech.-2009.- 43, N12.- P.1372 - 1379.
7. *Grigorenko Ya. M., Grigorenko A. Ya.* Static and Dynamic Problems for Anisotropic Inhomogeneous Shells with Variable Parameters and Their Numerical Solution (Review) // Int. Appl. Mech.-2013.- 49, N2.- P.123 - 193.
8. *Гузь О.М., Чернишенко І.С. Шнеренко К.І.* Концентрація напружень біля отворів у оболонках з композитних матеріалів // Прикладна механіка. - 2001.-37, N2 С. 3-43.
9. *Hosine A., Chapelle D., Baubakar M.L., et al.* Experimental and analytical investigation of the cylindrical part of a metallic vessel reinforced by filament winding while submitted to internal pressure // Int. J. Press. Vess. Piping.- 2009.- 86.- P.649 - 655.
10. *Marchuk A.V., and Piskunov V.G.* Statics, vibrations and stability of composite panels with gently curved orthotropic layers. 1. Statics and vibrations // Mechanics of Composite Materials ..- 1999.-35, N4.-P.285 - 292.
11. *Marchuk A.V., and Piskunov V.G.* Calculation of layered structures by semi analytic method of finite elements // Mechanics of Composite Materials. - 1997.-33, N6.-P.553 - 556.

12. *Marchuk A.V., Il'chenko Ya. L., and Gnedash S.V.* Analyzing of the stress-strain state of thick cylindrical shells // *Int. Appl. Mech.*-2011. - 47, N4. - P.449 - 455.
13. *Noor A.K., Burton W.S., and Peter J.M.* Assessment of computational models for multilayered composite cylinders // *Int. J. Solids Struct.* - 1991. - 27.No.10. - P.1269-1286.
14. *Sheng H.Y. and Ye J.Q.* A three-dimensional state space finite element solution for laminated composite cylindrical shells // *Comp. Methods Appl. Mech. Eng.* - 2003. - 192. - P.2441-2459.
15. *Shuvalov A.I. and Soldatos K.P.* On the successive approximation method for three-dimension analysis of radically inhomogeneous tubes with an arbitrary cylindrical anisotropy // *J. Sound Vibr.* - 2003. - 259, No.1. - P.233. - 239.

## REFERENCES

1. *Bazhenov V.A., Guliar A.I., Sakharov A.S., Topor A.G.* Poluanaliticheskiy metod konechnykh elementov v mekhanike deformiruiemykh tel. (Semi-analytical method of finite elements in strain bodies mechanics) // *K.: NII SM.*-1993. -376 s.
2. *Bakaiyan H., Hosseini H., and Ameri E.* Analis of multi-layered filament-wound composite pipes under combined integral pressure and thermo-mechanical loading witch thermal variations // *Compos. Struct.* - 2009. - 88. - P. 532 - 541.
3. *Grigorenko Ia.M., Vasilenko A.T., Pankratova N.D.* Zadachi teorii uprugosti neodnorodnykh tel. (The theory of non homogeneous bodies goals) – *K.: Naukova Dumka*, 1991. – 216 s.
4. *Grigorenko Ia.M., Vlaikov G.G., Grigorenko A.Ia.* Chislenno-analiticheskoe reshenie zadach mekhaniki obolochek na osnove razlichnykh modeley. (Numeric analytical problem solving on the basis of different models) -*K.: Akadempriodika*, 2006. - 472 s.
5. *Grigorenko, Ya., M., Yaremchenko, S., N. .* Refined analysis of the stress state of orthotropic elliptic cylindrical shells with variable geometrical parameters // *Int. Appl. Mech.*-2008.-40, N9. -P. 998 - 1005.
6. *Grigorenko, Ya., M., Grigorenko, A., Ya., Zakhariychenko, L., I. .* Study of effect of the geometrical parameters on the stress state of cylindrical shells with corrugated lipticcross-section // *Int. Appl. Mech.*-2009.- 43, N12. -P.1372 - 1379.
7. *Grigorenko Ya. M., Grigorenko A. Ya.* Static and Dynamic Problems for Anisotropic Inhomogeneous Shells with Variable Parameters and Their Numerical Solution (Review) // *Int. Appl. Mech.*-2013.- 49, N2. -P.123 - 193.
8. *Guz A.N., Chernyshenko I.S., Shnerenko K. I.* Kонтсentratsiia napriazheniy okolo otverstiy v obolochkakh iz kompozitnykh materialov. (Effect of holes in the composed material sheaths) // *Prikladnaia Mekhanika.* – 2001.- 37,N2 p.3-43.
9. *Hosine A., Chapelle D., Baubakar M.L., et al.* Experimental and analytical investigation of the cylindrical part of a metallic vessel reinforced by filament winding while submitted to internal pressure // *Int. J. Press. Vess. Piping.* - 2009. - 86. - P.649 - 655.
10. *Marchuk A.V., and Piskunov V.G.* Statics, vibrations and stability of composite panels with gently curved orthotropic layers. 1. Statics and vibrations // *Mechanics of Composite Materials* ..- 1999.-35, N4.-P.285 - 292.
11. *Marchuk A.V., and Piskunov V.G.* Calculation of layered structures by semi analytic method of finite elements // *Mechanics of Composite Materials.* - 1997.-33, N6.-P.553 - 556.
12. *Marchuk A.V., Il'chenko Ya. L., and Gnedash S.V.* Analyzing of the stress-strain state of thick cylindrical shells // *Int. Appl. Mech.*-2011. - 47, N4. - P.449 - 455.
13. *Noor A.K., Burton W.S., and Peter J.M.* Assessment of computational models for multilayered composite cylinders // *Int. J. Solids Struct.* - 1991. - 27.No.10. - P.1269-1286.
14. *Sheng H.Y. and Ye J.Q.* A three-dimensional state space finite element solution for laminated composite cylindrical shells // *Comp. Methods Appl. Mech. Eng.* - 2003. - 192. - P.2441-2459.
15. *Shuvalov A.I. and Soldatos K.P.* On the successive approximation method for three-dimension analysis of radically inhomogeneous tubes with an arbitrary cylindrical anisotropy // *J. Sound Vibr.* - 2003. - 259, No.1. - P.233. - 239.

*Marchuck O.V., Raskazov O.O., Gnedash S.V., Levkivskiy S.A.*

### **STRESS STRAIN BEHAVIOR ANALYSIS OF THICK-WALLED ANISOTROPIC CYLINDER SHEATHS SUSCEPTIBLE TO LOCAL IMPACT**

Two approaches to stress strain behavior of anisotropic thick-walled cylindrical sheath under local load influence investigation have been developed. Both approaches are based on division of hollow cylindrical sheath across the thickness by the concentric surfaces into a number of constituent cylindrical sheaths, thin enough to neglect their curve changes across the thickness. Corresponding to contact conditions on outer surfaces between the composed sheaths, we describe the stress strain behavior of the initial sheath, accounting for the curve changes across the thickness. In the first approach for sought functions approximation, polynomials are attracted, both across the thickness and in the plan itself. In the second approach for sought functions approximation polynomials are used and their distribution across the construction thickness is found on the basis of the analytical decision of the corresponding difference equation system. Investigative goals consideration by means of two methods serves as an additional veracity substantiation of accounting results.

**Key words:** thick layered anisotropic cylindrical sheaths, local shearing loads.

*Марчук А.В., Рассказов А.О., Гнедаш С.В., Левковський С.А.*

### **АНАЛИЗ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ ТОЛСТОСТЕННЫХ АНИЗОТРОПНЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК, ПОДВЕРЖЕННЫХ ЛОКАЛЬНОМУ ВОЗДЕЙСТВИЮ**

Построены два подхода к исследованию напряженно-деформированного состояния толстых анизотропных цилиндрических оболочек под воздействием локальных нагрузок при различных условиях закрепления контура. В первом подходе для аппроксимации искоемых функций в плане и по толщине используют полиномы. Во втором для аппроксимации искоемых функций в плане применяют линейные полиномы, а их распределение по толщине разыскивают на основе аналитического решения соответствующей системы дифференциальных уравнений. Проведен анализ напряженно-деформированного состояния оболочек в зоне локальной нагрузки.

**Ключевые слова:** толстые слоистые анизотропные цилиндрические оболочки, локальные нагрузки.

УДК 539.3

*Марчук О.В., Рассказов О.О., Гнедаш С.В., Левківський С.А. Аналіз напружено-деформованого стану товстостінних анізотропних циліндричних оболонок, схильних до локального впливу // Опір матеріалів і теорія споруд. – 2015. – Вип. 94. – С. 172 – 185.*

*Побудовано два підходи до дослідження напружено-деформованого стану товстих анізотропних циліндричних оболонок під дією локальних навантажень при різних умовах закріплення контура.*

Табл. 2.

*Марчук А.В., Рассказов А.О., Гнедаш С.В., Левковський С.А. Анализ напряженно-деформированного состояния толстостенных анизотропных цилиндрических оболочек, подверженных локальному воздействию // Соппротивление материалов и теория сооружений. – 2015. – Вип. 94. – С. 172 – 185.*

*Построены два подхода к исследованию напряженно-деформированного состояния толстых анизотропных цилиндрических оболочек под воздействием локальных нагрузок при различных условиях закрепления контура.*

*Marchuck O.V., Raskazov O.O., Gnedash S.V., Levkivskiy S.A. Stress strain behavior analysis of thick-walled anisotropic cylinder sheaths susceptible to local impact // Strength of Materials and Theory of Structures. – 2015. – Issue. 94. – С. 172 – 185.*

*Two approaches to stress strain behavior of anisotropic thick-walled cylindrical sheath under local load influence investigation have been developed.*

**Автори:**

Доктор технічних наук, професор кафедри опору матеріалів та машинознавства Національного транспортного університету **МАРЧУК Олександр Васильович**.

**Адреса робоча:** 01010 Україна, м. Київ, вул. Суворова, 1, Національний транспортний університет, кафедра опору матеріалів і машинознавства, МАРЧУКУ Олександру Васильовичу.

**Адреса домашня:** Україна, м. Київ, вул. Сім'ї Сосніних, 2/1, кв. 85. МАРЧУКУ Олександру Васильовичу.

**Роб. тел.** +380 (44) 280-43-68;

**Моб. тел.** +380 (99) 425-67-75;

**Дом. тел.** +380 (44) 407-62-11.

**e-mail:** [ksm\\_ntu@ukr.net](mailto:ksm_ntu@ukr.net)

Доктор технічних наук, професор, завідувач кафедру теоретичної та прикладної механіки Національного транспортного університету **РАССКАЗОВ Олександр Олегович**.

**Адреса робоча:** 01103 Україна, м. Київ, вул. Кіквідзе, 42, Національний транспортний університет, кафедра теоретичної та прикладної механіки, РАССКАЗОВУ Олександру Олеговичу.

**Моб. тел.** +380 (67) 243-26-48;

**e-mail:** [arasskazov@ukr.net](mailto:arasskazov@ukr.net)

Спеціаліст, аспірант кафедри опору матеріалів та машинознавства Національного транспортного університету **ГНСДАШ Сергій Вікторович**.

**Адреса робоча:** 01010 Україна, м. Київ, вул. Суворова, 1, Національний транспортний університет, кафедра опору матеріалів і машинознавства, ГНСДАШУ Сергію Вікторовичу.

**Роб. тел.** +380 (44) 280-43-68;

**Моб. тел.** +380 (63) 523-18-60;

**e-mail:** [ksm\\_ntu@ukr.net](mailto:ksm_ntu@ukr.net)

Старший викладач кафедри дорожніх машин Національного транспортного університету **ЛЕВКІВСЬКИЙ Сергій Анатолійович**.

**Адреса робоча:** 01010 Україна, м. Київ, вул. Суворова, 1, Національний транспортний університет, кафедра дорожніх машин, ЛЕВКІВСЬКОМУ Сергію Анатолійовичу.

**Адреса домашня:** Україна, м. Київ, вул. О. Бестужева, 34 кв. 42. ЛЕВКІВСЬКОМУ Сергію Анатолійовичу.

**Роб. тел.** +380 (44) 280-97-73;

**Моб. тел.** +380 (97) 831-65-47;

**Дом. тел.** +380 (44) 484-70-73.

**e-mail:** [sergey\\_levkovsky@ukr.net](mailto:sergey_levkovsky@ukr.net)