УДК 539.4

РОЗВИТОК ЗМІШАНОГО МЕТОДУ СКІНЧЕННИХ ЕЛЕМЕНТІВ ДО РОЗВЯЗАННЯ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ ТЕРМОМЕХАНІКИ

О.Ю. Чирков[1]
д-р. техн. наук, ст. наук. співр.

[1] *Інститут проблем міцності ім. Г.С.Писаренка НАН України, Київ, Україна*

Розвинуто загальну теорію змішаних схем метода скінченних елементів для розв’язання крайових задач термомеханіки неоднорідних середовищ, зокрема, нелінійних задач, що описують неізотермічні процеси пружно-пластичного деформування за криволінійними траєкторіями малої кривизни. Із застосуванням апарату функціонального аналізу досліджено коректність змішаних проекційно-сіткових алгоритмів і на цій основі сформульовано умови, що забезпечують стійкість та збіжність змішаної апроксимації для напружень, деформацій і переміщень. Встановлено, що змішаний метод призводить до більш точних розрахункових розподілів напружень і деформацій порівняно із класичним методом переміщень. Побудовано спеціальні скінченні елементи, що забезпечують стійкість та збіжність пропонованих змішаних апроксимацій. Отримано систему розв’язувальних рівнянь змішаного методу з урахуванням точного задоволення статичним межовим умовам на поверхні тіла, для розв’язання яких запропоновано економічні та стійкі кроково-ітераційні обчислювальні алгоритми.

Ключові слова: метод скінченних елементів, неізотермічні процеси пружно-пластичного деформування, змішана схема метода скінченних елементів.

Загальновідомо, що прикладні задачі термомеханіки неоднорідних середовищ належать до найбільш складних у математичній фізиці, розв’язання яких, як правило, досягається за допомогою наближених методів розрахунку. У той же час відомі чисельні методи механіки деформівного тіла можуть виявитися недостатньо точними і ефективними для розв’язання практичних задач, тому що велика розмірність дискретної задачі, а також раптова змінність фізико-механічних властивостей матеріалу і їх суттєва нелінійність можуть призвести до втрати стійкості або порушення збіжності обчислювальних процесів. Через це виникає необхідність розроблення більш досконалого апарату проведення розрахункових досліджень, що містить удосконалені методи та алгоритми розв’язання прикладних задач термомеханіки.

Нині найбільш універсальним методом розв'язання крайових задач термомеханіки є метод скінченних елементів (МСЕ). Ефективність МСЕ мало залежить від конфігурації тіла, характеру межових умов, закону зміни властивостей середовища і зовнішнього впливу на тіло. Найбільш дослідженими і поширеними в даний час є класичні схеми МСЕ у переміщеннях, що відображено у великій кількості публікацій закордонних і вітчизняних авторів.

Вказуючи на переваги класичного МСЕ, необхідно враховувати також його недоліки. До найбільш суттєвих з них належать розривна апроксимація напружень і деформацій, а також більш низький порядок збіжності апроксимації для напружень і деформацій порівняно з таким для переміщень. У той же час напруження зазвичай є основними шуканими функціями у задачах механіки деформованого тіла і, відповідно, їх визначають із достатньо високим ступенем точності.

Традиційні підходи щодо підвищення точності шляхом збільшення щільності скінченно-елементного розбиття або переходу до більш складних скінченних елементів не завжди ефективні навіть для лінійних задач. Для нестаціонарних і нелінійних тривимірних задач термомеханіки вони практично не прийнятні, тому що збільшення порядку розв'язуваної системи нелінійних алгебраїчних рівнянь і велика кількість часових кроків та ітерацій призводять до суттєвого зростання обчислювальних витрат. Тому перспективним у чисельному аналізі задач механіки деформованого тіла є застосування змішаних формулювань МСЕ, в яких напруження і деформації входять у розв’язувальні рівняння поряд з переміщеннями як рівноправні невідомі. Саме такі формулювання МСЕ розглянено у даній роботі.

У задачах теорії пружності і пластичності основна перевага використання змішаних формулювань МСЕ щодо класичного підходу МСЕ у формі методу переміщень полягає у зменшенні похибки апроксимації для напружень і деформацій, а також можливості побудови розв’язків для напружень з врахуванням точного задоволення статичним межовим умовам на частині поверхні тіла. Ще одна важлива перевага полягає в тому, що змішані схеми МСЕ дозволяють забезпечити неперервність апроксимації не тільки для переміщень, але й для напружень і деформацій, тоді як класичні схеми МСЕ призводять до розривної апроксимації напружень і деформацій.

Початкові передумови для побудови змішаних формулювань МСЕ можуть бути різними. Нині можна виділити три підходи, що мають загальні характерні особливості. Перший ґрунтується на використанні варіаційних принципів механіки, згідно з якими розв’язання крайової задачі зводиться до знаходження стаціонарного значення деякого функціоналу за відповідними аргументам. Другий підхід базується на подвійно-основному (змішаному) формулюванні крайової задачі виходячи із принципу подвійності. Третій підхід ґрунтується на узагальненому формулюванні крайової задачі та результатах теорії, розробленої Ф.Брезі [1]. За такого підходу розглядають змішане формулювання крайової задачі незалежно від того, одержано воно із задачі про сідлову точку або ні. Загальна теорія і аналіз змішаних та гібридних методів містяться в [1,2]. Деякі застосування змішаних формулювань МСЕ до розв’язання задач теорії пружності і пластичності та їх реалізація описані в [3-9].

Зазначимо, що для дослідження умов існування, єдиності, стійкості і збіжності наближених розв’язків, що отримані на основі змішаного методу, класичні результати аналізу схем МСЕ у переміщеннях непридатні. Необхідні і достатні умови стійкості та збіжності змішаних і гібридних методів сформульовано в [1,2], проте для багатьох практично важливих варіантів змішаних і гібридних схем МСЕ достатні умови не виконуються. У [9] сформульовано менш обмежувальні умови та запропоновано інший шлях доведення коректності та збіжності наближених розв’язків, що одержані на основі змішаного формулювання задач теорії пружності і пластичності.

Отже, незважаючи на те, що змішані формулювання МСЕ виявляються більш гнучкими і універсальними, а відповідні їм схеми МСЕ мають переваги у точності, вони не знайшли на практиці широкого поширення і їх застосування для розв'язання прикладних задач термомеханіки досить обмежене. Сучасні комерційні програмні комплекси орієнтовано в основному на класичний варіант МСЕ і не містять у своїх бібліотеках скінченних елементів змішаного типу, за допомогою яких можна одержати відчутні переваги у точності і ефективності розв’язання двох- і тривимірних задач теорії пружності та пластичності. Це пояснюється труднощами практичного конструювання змішаної апроксимації, що задовольняє умовам стійкості та збіжності змішаного методу. До цього часу не існує придатної для всіх класів задач механіки єдиної методології побудови найкращої змішаної апроксимації для напружень, деформацій і переміщень. У кожному конкретному випадку необхідно ретельно обґрунтувати коректність побудови апроксимувальних функцій та детально аналізувати збіжність у разі їх використання. До того ж залишається важлива для практики задача фактичного знаходження дискретного розв’язку, що пов'язано з розробленням і реалізацією ефективних методів та обчислювальних алгоритмів розв'язання матричних рівнянь змішаного методу.

Далі представлено основні результати аналізу змішаного проекційно-сіткового методу в задачах термомеханіки. Запропоновані змішані схеми та алгоритми МСЕ дозволили підвищити точність і ефективність розв’язання прикладних задач термомеханіки, а також забезпечити отримання стійких і надійних чисельних розв’язків задач зазначеного типу.

Узагальнене представлення крайової задачі термопластичності. Для розрахунку полів напружень, деформацій і переміщень необхідно розв’язати крайову задачу, яку представлено системою диференційних рівнянь з частковими похідними. Розв’язок зазначеної системи повинен задовольняти кінематичним і статичним межовим умовам на поверхні тіла, а також умовам у початковий момент часу. У разі використання проекційних і сіткових методів розв’язання крайової задачі її необхідно сформулювати не у формі системи диференційних рівнянь, а в узагальненому представленні, тобто у вигляді інтегральних тотожностей.

Узагальнене представлення крайової задачі дозволяє знизити вимоги до гладкості шуканого розв’язку, тому що в інтегральні тотожності входять похідні нижчих порядків, ніж в диференційні рівняння. Вказана обставина суттєво розширює клас допустимих функцій у разі побудови узагальненого розв'язку крайової задачі, а також дозволяє використовувати наближені методи розрахунку, які особливо вдало поєднують сучасні проекційні і сіткові методи, наприклад метод скінченних елементів.

Вважаємо, що тіло займає область Ω у двох- або тривимірному евклідовому просторі і має регулярну межу S. На частині межі задано переміщення, що унеможливлюють переміщення Ω як жорсткого тіла, а на іншій частині – поверхневі навантаження, щільність яких визначають компоненти $\rho_i^S(\mathbf{x},t)$, де $\mathbf{x}$ – координати точки, t – час. Крім того, тіло зазнає впливу нерівномірного температурного поля $T(\mathbf{x},t)$, масових сил $\rho_i^M(\mathbf{x},t)$ і початкових деформацій $\xi_{ij}(\mathbf{x},t)$. Вектор переміщень у кожній точці представлено компонентами $u_i(\mathbf{x},t)$, а деформації $\varepsilon_{ij}(\mathbf{x},t)$ і напруження $\sigma_{ij}(\mathbf{x},t)$ описуються симетричними тензорами другого рангу.

У разі математичного моделювання неізотермічних процесів пружнопластичного деформування у квазістатичному представленні узагальнену крайову задачу для фіксованого моменту часу можна подати наступною системою рівнянь:

$$\int_\Omega \varepsilon_{ij}(t)\delta\sigma_{ij}d\Omega=\frac{1}{2}\int_\Omega \left(\frac{\partial u_i(t)}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j(t)}{\partial x_i}\right)\delta\sigma_{ij}\,d\Omega;$$

$$\int_\Omega \sigma_{ij}(t)\,\delta\varepsilon_{ij}\,d\Omega=\int_\Omega d_{ijkl}(\varepsilon_{ij}(t),\xi_{ij}(t),t)\,(\varepsilon_{kl}(t)-\xi_{kl}(t))\,\delta\varepsilon_{ij}d\Omega;$$

$$\frac{1}{2}\int_\Omega \sigma_{ij}(t)\left(\frac{\partial\delta u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial\delta u_j}{\partial x_i}\right)d\Omega=\int_\Omega \rho_i^M(t)\,\delta u_i d\Omega+\int_S \rho_i^S(t)\,\delta u_i\,dS, \qquad (1)$$

де $\delta\sigma_{ij}$, $\delta\varepsilon_{ij}$, δu_i – довільні неперервні функції, які можна інтерпретувати як варіації напружень, деформацій і переміщень; d_{ijkl} – компоненти тензора четвертого рангу, що зв'язують компоненти напружень і деформацій рівнянням стану.

Перше рівняння системи (1) відповідає співвідношенням Коші, друге – визначає фізичний закон пружно-пластичного середовища, а третє – забезпечує виконання умов статичної рівноваги тіла у формі варіаційного рівняння Лагранжа.

Зазначимо, що у другому рівнянні системи (1) рівняння стану матеріалу сформульовано не у приростах, а для повних компонентів напружень і деформацій. Для їх отримання необхідно проінтегрувати рівняння пластичного плину Прандля-Рейсса за етап навантажування. Загальну схему математичних перетворень для побудови множини двошарових схем інтегрування рівнянь пластичного плину, а також формулювання умов, за яких ці рівняння узгоджуються з принципом необоротності роботи на приростах пластичних деформацій і постулатом зміцнення Друкера, наведено в [10].

Вважаємо, що переміщення є елементами множини U , що складається з вектор-функцій, які інтегруються з квадратом на Ω разом зі своїми першими похідними включно і дорівнюють нулю на частини межі тіла. Напруження і деформації будемо розглядати як елементи множини L тензор-функцій, що інтегруються з квадратом на Ω, з нормою, яка асоційована зі скалярним добутком

$$(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\varepsilon})_L=\int\limits_{\Omega}\sum_{1\le i,j\le n}\sigma_{ij}\varepsilon_{ij}\,d\,\Omega\,.$$

На підставі рівнянь (1) узагальнену крайову задачу можна сформулювати так.

Знайти трійку $(\mathbf{u}(t),\boldsymbol{\varepsilon}(t),\boldsymbol{\sigma}(t))\in U\times L\times L$, таку що

$$(\boldsymbol{\varepsilon}(t),\delta\boldsymbol{\sigma})_L=(B\,\mathbf{u}(t),\delta\boldsymbol{\sigma})_L,\quad\forall\,\delta\boldsymbol{\sigma}\in L;$$
$$(\boldsymbol{\sigma}(t),\,\delta\boldsymbol{\varepsilon})_L=(D(\boldsymbol{\varepsilon}(t),\boldsymbol{\xi}(t),t)\,(\boldsymbol{\varepsilon}(t)-\boldsymbol{\xi}(t)),\delta\boldsymbol{\varepsilon})_L,\quad\forall\;\delta\boldsymbol{\varepsilon}\in L;$$
$$(\boldsymbol{\sigma}(t),\,B\,\delta\mathbf{u})_L=\langle\boldsymbol{\rho}(t),\,\delta\,\mathbf{u}\rangle,\quad\forall\;\delta\mathbf{u}\in U\,,\ (2)$$

де B – лінійний диференційний оператор, тобто оператор обчислення малих деформацій $\boldsymbol{\varepsilon}(t)$ за визначеними переміщеннями $\mathbf{u}(t)$; D – нелінійний оператор, що зв'язує напруження з деформаційною та тепловою історією; $\langle\boldsymbol{\rho}(t),\delta\,\mathbf{u}\rangle$ – лінійна форма, що ототожнюється з роботою поверхневих навантажень і масових сил на можливих переміщеннях.

Система нелінійних рівнянь (2) визначає узагальнене представлення крайової задачі теорії пластичності щодо переміщень, деформацій і напружень [11].

Зазначимо, що рівняння (2) дозволяють сформулювати узагальнену крайову задачу теорії пластичності у переміщеннях:

$$(D(B\mathbf{u}(t),\boldsymbol{\xi}(t),t)\,(B\,\mathbf{u}(t)-\boldsymbol{\xi}(t)),B\,\delta\,\mathbf{u})_L=\langle\boldsymbol{\rho}(t),\delta\,\mathbf{u}\rangle,\quad\forall\,\delta\,\mathbf{u}\in U\,,\quad(3)$$

Застосування рівняння (3) для побудови сіткових схем призводить до класичного формулювання МСЕ у формі методу переміщень [8]. У такому випадку деформації визначають диференціюванням наближених переміщень, одержаних із розв’язку задачі у переміщеннях, що є основною причиною погіршення збіжності апроксимації для деформацій і напружень порівняно з розрахунком самих переміщень.

Альтернативний підхід полягає у використанні крайової задачі у формі рівнянь (2), за якого деформації і напруження є її безпосередніми аргументами, а не визначаються на основі розв’язання задачі у переміщеннях. Зауважимо, що для континуальних задач теорії пластичності узагальнене представлення у переміщеннях і формулювання крайової задачі щодо переміщень, деформацій і напружень еквівалентні, але узагальнене представлення у формі системи рівнянь (2) є більш гнучким для побудови проекційно-сіткової схеми.

Зазначимо, що у разі практичного використання проекційного методу узагальнений розв’язок рівнянь (2), (3) не обов'язково задовольняє статичним умовам на поверхні тіла, оскільки межові умови для напружень належать до природних і їх враховують у самих рівняннях проекційного методу. Ця обставина значною мірою спрощує побудову пробних (базисних) функцій, тому що їх можна вибирати без врахування статичним межовим умовам на поверхні тіла, що полегшує розв’язок багатьох практично важливих задач, особливо у випадку дво- або тривимірної області зі складною формою межі. Зокрема потрібно враховувати, що точність наближених розв’язків для напружень і деформацій не завжди буде прийнятною, особливо для примежової смуги і на межі області.

Наведемо узагальнене представлення крайової задачі, використання якої для побудови сіткових схем дозволяє одержати наближений розв’язок із врахуванням точної відповідності статичним межовим умовам на частині поверхні тіла. Для цього введемо до розгляду множини можливих тензор-функцій для напружень і деформацій, що задовольняють заданим умовам на межі тіла.

Напруження будемо розглядати як елементи функціональної множини Z, яка складається із тензор-функцій, що інтегруються з квадратом на Ω разом із своїми першими похідними включно і дорівнюють заданим напруженням на частині поверхні тіла. Простір можливих напружень Z^0 визначимо, як підмножину елементів із множини Z, що задовольняють однорідним статичним умовами на межі області.

Вважаємо, що деформації, як і напруження, інтегруються з квадратом на Ω разом із своїми першими похідними включно і забезпечують виконання статичних межових умов на частині поверхні тіла. Множину деформацій із перерахованими властивостями позначимо X. Тоді простір можливих деформацій X^0 складається з елементів множини X, що задовольняють однорідним статичним умовам на межі області.

Якщо напруження і деформації подати у вигляді

$$\boldsymbol{\sigma}(t) = \boldsymbol{\sigma}^0(t) + \boldsymbol{\sigma}^S(t), \quad \boldsymbol{\sigma}^0(t) \in Z^0; \quad \boldsymbol{\sigma}^S(t) \in Z\,;$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}(t) = \boldsymbol{\varepsilon}^0(t) + \boldsymbol{\varepsilon}^S(t), \quad \boldsymbol{\varepsilon}^0(t) \in X^0; \quad \boldsymbol{\varepsilon}^S(t) \in X, \tag{4}$$

де $\boldsymbol{\sigma}^S(t)$ – напруження, що задовольняють неоднорідним статичним умовами на частині поверхні тіла; $\boldsymbol{\varepsilon}^S(t)$ – деформації, які визначають за напруженням $\boldsymbol{\sigma}^S(t)$ з використанням рівняння стану матеріалу, то узагальнену крайову задачу (2) можна переформулювати так.

Знайти трійку $(\mathbf{u}(t),\, \boldsymbol{\varepsilon}^0(t),\, \boldsymbol{\sigma}^0(t)) \in U \times X^0 \times Z^0$ і пару ($\boldsymbol{\varepsilon}^S(t)$, $\boldsymbol{\sigma}^S(t)) \in X \times Z$, такі що

$$(\,\boldsymbol{\varepsilon}^0(t), \delta\boldsymbol{\sigma})_L = (\,B\mathbf{u}(t), \delta\boldsymbol{\sigma})_L, \quad \forall\ \delta\,\boldsymbol{\sigma} \in Z^0;$$

$$(\boldsymbol{\sigma}^0(t), \delta\boldsymbol{\varepsilon})_L = (D(\boldsymbol{\varepsilon}(t), \xi(t), t)(\boldsymbol{\varepsilon}(t) - \xi(t)), \delta\boldsymbol{\varepsilon})_L, \quad \forall\ \delta\boldsymbol{\varepsilon} \in X^0;$$

$$(\boldsymbol{\sigma}^0(t), B\,\delta\,\mathbf{u})_L = \langle \boldsymbol{\rho}(t), \delta\,\mathbf{u} \rangle - (\boldsymbol{\sigma}^S(t), B\,\delta\,\mathbf{u})_L, \quad \forall\ \delta\,\mathbf{u} \in U\,. \tag{5}$$

Система нелінійних рівнянь (4), (5) визначає узагальнене представлення крайової задачі теорії пластичності щодо переміщень, деформацій і напружень [12].

Що стосується умов існування та єдиності узагальненого розв’язку нелінійної крайової задачі, що сформульована у формі систем рівнянь (2), (3), (5), то справедливим є наступне твердження. Якщо за різних фіксованих температур функції, що описують криві деформування матеріалу, випуклі, узагальнений розв’язок крайової задачі існує і єдиний, а також безперервно залежить від зміни навантажень і початкових деформацій [11].

Основні положення змішаної схеми МСЕ. У проекційно-сітковому методі для побудови скінченновимірних просторів як базисні використовують кусково-поліноміальні функції, тобто функції із скінченним малим носієм (фінітні функції) [8]. Для їх побудови за допомогою сітки здійснюють дискретизацію області Ω на скінченні елементи простішої геометричної форми і на об'єднанні елементів, що прилягають до кожного вузла сітки, будують кусково-поліноміальні функції із скінченним носієм, що дорівнює обраному об'єднанню. Будь-яку повну лінійно-незалежну систему функцій такого виду приймають як базисну. Переваги такого базису полягають у тому, що носії його функцій набагато менші Ω і базис «майже ортогональний». Для проекційного методу з такими базисними функціями матриці систем розв'язувальних рівнянь стають рідкозаповненими, що суттєво спрощує процес розв'язання задачі.

Наведемо спочатку класичне представлення скінченновимірної задачі у переміщеннях. Зведення узагальненої крайової задачі, що описується нелінійним рівнянням (3), до деякої скінченновимірної задачі становить суть проекційно-сіткового методу.

Для побудови скінченновимірної задачі множину можливих переміщень U апроксимуємо послідовністю скінченновимірних просторів U_h, де h – визначальний параметр множини скінченновимірних просторів, що наближається до нуля.

Вважаємо, що множина апроксимувальних просторів U_h задовольняє уведенню $U_h \subset U$. Тоді за аналогією з рівнянням (3) сформулюємо скінченновимірну задачу так.

Знайти переміщення $\bar{\mathbf{u}}_h(t) \in U_h$ такі, що

$$(D(B\,\bar{\mathbf{u}}_h(t),\xi_h(t),t)(B\bar{\mathbf{u}}_h(t)-\xi_h(t)),B\,\delta\,\mathbf{u}_h)_L = \langle \boldsymbol{\rho}(t),\delta\,\mathbf{u}_h\rangle, \forall\ \delta\,\mathbf{u}_h \in U_h\,, \quad (6)$$

Рівняння (6) визначає проекційно-сіткове формулювання крайової задачі теорії пластичності у переміщеннях. Якщо матеріал характеризується властивістю зміцнення на ділянці пружно-пластичного деформування, розв'язок нелінійного рівняння (6) існує і єдиний, а також безперервно залежить від зміни навантажень і початкових деформацій.

Отже, використання рівняння (6) для побудови сіткових схем призводить до найбільш поширеного формулювання МСЕ у формі методу переміщень [8]. У цьому методі для апроксимації переміщень застосовують кусково-поліноміальні неперервні функції, а розподіли деформацій і напружень характеризуються розривною апроксимацією, внаслідок диференціювання переміщень. Тоді похибка наближеного обчислення напружень і деформацій буде на порядок більше, ніж похибка за переміщенням, зокрема найбільш помітно ця похибка проявляється у вузлах на межі тіла.

Альтернативний підхід ґрунтується на використанні узагальненого представлення крайової задачі у формі системи нелінійних рівнянь (2) щодо переміщень, деформацій і напружень. Побудова проекційно-сіткової схеми на основі рівнянь (2) призводить до змішаного формулювання МСЕ. У разі такого формулювання напруження і деформації входять у розв'язувальні рівняння поряд із переміщеннями як рівноправні невідомі.

Для формулювання скінченновимірної задачі простори U і L апроксимуємо послідовністю скінченновимірних підпросторів U_h і L_h. Вважаємо, що для побудови просторів U_h і L_h використано окрему апроксимацію переміщень, деформацій і напружень за допомогою різного набору кусково-поліноміальних базисних функцій. Тоді за аналогією з континуальною задачею (2) представимо скінченновимірну задачу так.

Знайти трійку $(\mathbf{u}_h(t),\, \boldsymbol{\varepsilon}_h(t),\, \boldsymbol{\sigma}_h(t)) \in U_h \times L_h \times L_h$, таку що

$$(\boldsymbol{\varepsilon}_h(t),\, \delta\boldsymbol{\sigma}_h)_L = (B\mathbf{u}_h(t),\, \delta\boldsymbol{\sigma}_h)_L, \quad \forall\ \delta\boldsymbol{\sigma}_h \in L_h;$$
$$(\boldsymbol{\sigma}_h(t),\, \delta\boldsymbol{\varepsilon}_h)_L = (D(\boldsymbol{\varepsilon}_h(t), \xi_h(t), t)(\boldsymbol{\varepsilon}_h(t) - \xi_h(t)), \delta\boldsymbol{\varepsilon}_h)_L, \quad \forall\ \delta\boldsymbol{\varepsilon}_h \in L_h;$$
$$(\boldsymbol{\sigma}_h(t),\, B\,\delta\mathbf{u}_h)_L = \langle \boldsymbol{\rho}(t),\, \delta\mathbf{u}_h \rangle, \quad \forall\ \delta\mathbf{u}_h \in U_h. \tag{7}$$

Система нелінійних рівнянь (7) визначає змішане проекційно-сіткове формулювання крайової задачі теорії пластичності щодо переміщень, деформацій і напружень [13].

Для врахування статичних межових умов на частині поверхні тіла переформулюємо скінченновимірну задачу (7) так. Вважаємо, що $X_h \times Z_h$ – апроксимувальна підмножина для напружень і деформацій, які забезпечують виконання статичних умов на межі тіла. Тоді простір $X_h^0 \times Z_h^0$ складається з елементів множини $X_h \times Z_h$, що задовольняють однорідним статичним межовим умовам.

Якщо напруження і деформації представити у вигляді

$$\boldsymbol{\sigma}_h(t) = \boldsymbol{\sigma}_h^0(t) + \boldsymbol{\sigma}_h^S(t), \quad \boldsymbol{\sigma}_h^0(t) \in Z_h^0; \quad \boldsymbol{\sigma}_h^S(t) \in Z_h;$$
$$\boldsymbol{\varepsilon}_h(t) = \boldsymbol{\varepsilon}_h^0(t) + \boldsymbol{\varepsilon}_h^S(t), \quad \boldsymbol{\varepsilon}_h^0(t) \in X_h^0; \quad \boldsymbol{\varepsilon}_h^S(t) \in X_h, \tag{8}$$

де $\boldsymbol{\sigma}_h^S(t), \boldsymbol{\varepsilon}_h^S(t)$ – напруження і деформації, що задовольняють неоднорідним статичним межовим умовам на частині поверхні тіла, то скінченновимірну задачу за аналогією із рівняннями (5) сформулюємо так.

Знайти трійку $(\mathbf{u}_h(t),\, \boldsymbol{\varepsilon}_h^0(t), \boldsymbol{\sigma}_h^0(t)) \in U_h \times X_h^0 \times Z_h^0$ і пару $(\boldsymbol{\varepsilon}_h^S(t), \boldsymbol{\sigma}_h^S(t)) \in X_h \times Z_h$, такі що

$$(\boldsymbol{\varepsilon}_h^0(t),\, \delta\boldsymbol{\sigma}_h)_L = (B\mathbf{u}_h(t),\, \delta\boldsymbol{\sigma}_h)_L, \quad \forall\ \delta\boldsymbol{\sigma}_h \in Z_h^0;$$
$$(\boldsymbol{\sigma}_h^0(t), \delta\boldsymbol{\varepsilon}_h)_L = (D(\boldsymbol{\varepsilon}_h(t), \xi_h(t), t)\,(\boldsymbol{\varepsilon}_h(t) - \xi_h(t)),\, \delta\boldsymbol{\varepsilon}_h)_L, \quad \forall\ \delta\boldsymbol{\varepsilon}_h \in X_h^0;$$
$$(\boldsymbol{\sigma}_h^0(t),\, B\,\delta\mathbf{u}_h)_L = \langle \boldsymbol{\rho}(t),\, \delta\mathbf{u}_h \rangle - (\boldsymbol{\sigma}_h^S(t), B\,\delta\mathbf{u}_h)_L, \quad \forall\ \delta\mathbf{u}_h \in U_h. \tag{9}$$

Система нелінійних рівнянь (8), (9) визначає змішане проекційно-сіткове представлення крайової задачі теорії пластичності щодо переміщень, деформацій і напружень з урахуванням статичних межових умов на частині поверхні тіла [12].

Сформулюємо основні результати аналізу стійкості і збіжності змішаного методу в задачах теорії пластичності. Для цього необхідно встановити спочатку відповідність між полями деформацій для класичного та змішаного підходів МСЕ [9].

Визначимо простір Y_h як множину значень оператора B, що діє на замкнутому підпросторі $U_h \subset U$, тобто $Y_h = BU_h$, Тоді Y_h – апроксимувальний підпростір для простору деформацій. Обидва простори X_h^0 і Y_h скінченновимірні, але жоден з них не є підмножиною іншого.

Введемо до розгляду проектувальний оператор $I_h : Y_h \to X_h^0$, який ставить у відповідність кожному елементу з простору Y_h його ортогональну проекцію в X_h^0. Оператор проектування I_h породжує розкладання простору деформацій X_h^0 у пряму суму підпросторів:

$$X_h^0 = \mathrm{Im}(I_h) \oplus \mathrm{Ker}\,(I_h^*),$$

де I_h^* – спряжений щодо I_h проектувальний оператор, який діє з X_h^0 в Y_h. Зауважимо, що простори Y_h і $\mathrm{Im}(I_h)$ можна інтерпретувати як поля можливих деформацій для класичних і змішаних схем МСЕ, а простір $\mathrm{Ker}\,(I_h^*)$ як всілякі «саморівноважні» розподіли деформацій.

Відзначимо, що визначений таким чином оператор ортогонального проектування I_h відіграє вирішальну роль в аналізі стійкості і збіжності змішаного методу.

Дійсно, з використанням оператора проектування I_h систему нелінійних рівнянь змішаного методу (9) представимо у еквівалентному вигляді

$$(\boldsymbol{\varepsilon}_h^0(t),\ \delta\boldsymbol{\sigma}_h)_L = (I_h B\,\mathbf{u}_h(t),\ \delta\boldsymbol{\sigma}_h)_L, \quad \forall\ \delta\boldsymbol{\sigma}_h \in Z_h^0;$$

$$(\boldsymbol{\sigma}_h^0(t),\ \delta\boldsymbol{\varepsilon}_h)_L = (D(\boldsymbol{\varepsilon}_h(t), \xi_h(t), t)(\boldsymbol{\varepsilon}_h(t) - \xi_h(t)),\ \delta\boldsymbol{\varepsilon}_h)_L,\ \forall\ \delta\boldsymbol{\varepsilon}_h \in X_h^0;$$

$$(\boldsymbol{\sigma}_h^0(t),\ I_h B\,\delta\mathbf{u}_h)_L = \langle\boldsymbol{\rho}(t),\ \delta\,\mathbf{u}_h\rangle - (\boldsymbol{\sigma}_h^S(t),\ B\,\delta\mathbf{u}_h)_L, \quad \forall\ \delta\,\mathbf{u}_h \in U_h,$$

звідки випливає нелінійне рівняння щодо переміщень:

$$(D(I_h B\mathbf{u}_h(t), \xi_h(t), t)\ (I_h B\,\mathbf{u}_h(t) - \xi_h(t)),\ I_h\ B\,\delta\mathbf{u}_h)_L =$$

$$= \langle\boldsymbol{\rho}(t), \delta\mathbf{u}_h\rangle - (\boldsymbol{\sigma}_h^S(t), B\,\delta\,\mathbf{u}_h)_L,\ \forall\ \delta\,\mathbf{u}_h \in U_h, \qquad (10)$$

Отже, якщо нелінійний оператор D має властивості сильної монотонності та ліпшиць-неперервності, одержимо необхідну і достатню умову коректного розв'язання рівняння (10).

Умова стійкості. Якщо для всякого h і довільних переміщень $\mathbf{v}_h \in U_h$ виконується оцінка

$$d \,||\, B\mathbf{v}_h \,||_L \;\le\; ||\, I_h B\mathbf{v}_h \,||_L\,,\quad 0 < d \le 1,\quad \forall\; \mathbf{v}_h \in U_h\,, \tag{11}$$

де стала d не залежить від h, то розв'язок рівняння (10), а отже, і рівнянь змішаного методу (9) існує і єдиний, а також стійкий щодо вільних варіацій навантажень і початкових деформацій.

Відзначимо, що для практичного застосування нерівність (11) зручно подати в іншому вигляді. Дійсно, згідно з умовою стійкості (11) маємо

$$d \;=\; \operatorname*{Inf}_{\mathbf{v}_h \in U_h} \frac{||\, I_h B\mathbf{v}_h \,||_L}{||\, B\mathbf{v}_h \,||_L}\,. \tag{12}$$

Тоді з урахуванням властивостей проектувального оператора I_h рівність (12) перетворимо до наступного вигляду

$$d^2 = 1 \;-\; \operatorname*{Sup}_{\mathbf{v}_h \in U_h}\; \operatorname*{Inf}_{\boldsymbol{\eta}_h \in X_h^0} \frac{||\, B\mathbf{v}_h - \boldsymbol{\eta}_h \,||_L^2}{||\, B\mathbf{v}_h \,||_L^2}\,,$$

звідки отримаємо оцінку знизу для d :

$$d^2 \;\ge\; 1 \;-\; \operatorname*{Sup}_{\mathbf{v}_h \in U_h} \frac{||\, B\mathbf{v}_h - \boldsymbol{\eta}_h \,||_L^2}{||\, B\mathbf{v}_h \,||_L^2}\,,\quad \forall\; \boldsymbol{\eta}_h \in X_h^0\,. \tag{13}$$

Зауважимо, що для практичного обґрунтування коректності змішаної апроксимації простіше використовувати нерівність (13), ніж умову (11), тому що перевірка нерівності (13) не потребує побудови та використання у явному вигляді проектувального оператора I_h.

Що стосується збіжності змішаної апроксимації, то справедливим є наступне твердження. Якщо виконується умова (11), то одержані у [13] оцінки похибок змішаної апроксимації для деформацій і напружень дозволяють встановити не тільки факт збіжності змішаного методу в задачах термопластичності, але також вказують на можливість одержання покращеної апроксимації для деформацій і напружень порівняно зі звичайною апроксимацією МСЕ.

Більше того, якщо початкові пластичні деформації для поточного етапу навантажування визначити на основі розв'язування пружно-пластичної задачі для попередніх етапів навантажування, то отримуємо оцінки сумарної похибки для деформацій і напружень наприкінці етапу навантажування [13]. Одержані нерівності дозволяють встановити глобальну збіжність змішаного методу для квазістатичних задач термопластичності, що описують неізотермічні процеси пружно-пластичного деформування з урахуванням початкових деформацій, які залежать від історії деформування і нагрівання. Згідно з отриманими оцінками точність розв'язування скінченновимірної задачі (9) для початкових станів навантажування повинна бути достатньою, щоб не допустити впливу зростання перших коефіцієнтів у розкладі сумарної похибки на точність розв'язування пружнопластичної задачі на наступних етапах навантажування.

Потрібно підкреслити, що принципова відмінність змішаних схем МСЕ від традиційних полягає у необхідності побудови таких апроксимувальних функцій, для яких забезпечується виконання умови стійкості (11), що гарантує розв'язуваність, збіжність та одержання стійкого розв'язку скінченновимірної задачі за будь-якого кроку сітки.

Чисельний аналіз свідчить, що спроби ігнорування умови стійкості (11) у разі конструювання змішаних апроксимацій призводять до погано обумовлених скінченновимірних задач, розв'язки яких мають нестійкий осцилювальний характер. Отже, сформульована умова стійкості, яку записано у формі нерівності (11) або (12), відіграє фундаментальну роль в аналізі коректності змішаного методу в задачах теорії пластичності.

Формулювання матричних рівнянь змішаного методу. Застосування змішаної апроксимації МСЕ для розв'язання крайової задачі неізотермічної термопластичності приводить до системи нелінійних матричних рівнянь щодо вузлових невідомих переміщень, деформацій і напружень:

$$[\mathbf{M}]\ \{\boldsymbol{\varepsilon}(t)\} = [\mathbf{H}]\ \{\mathbf{u}(t)\};$$
$$\{\boldsymbol{\sigma}(t)\} = [\mathbf{D}(\{\boldsymbol{\varepsilon}(t)\},\ \{\boldsymbol{\xi}(t)\})]\ (\{\boldsymbol{\varepsilon}(t)\} - \{\boldsymbol{\xi}(t)\});$$
$$[\mathbf{H}]^T \{\boldsymbol{\sigma}(t)\} = \{\boldsymbol{\rho}(t)\}. \qquad (14)$$

Перше рівняння системи (14) визначає вектор значень деформацій $\{\boldsymbol{\varepsilon}(t)\}$ у вузлах сітки за вузловими переміщенням $\{\mathbf{u}(t)\}$, друге – пов'язане з рівнянням стану матеріалу для побудови вектора вузлових напружень $\{\boldsymbol{\sigma}(t)\}$ і третє – забезпечує виконання умов статичної рівноваги. Вектори $\{\boldsymbol{\rho}(t)\}$ і $\{\boldsymbol{\varepsilon}(t)\}$ відповідають наведеним до вузлів сітки заданим навантаженням і початковим деформаціям.

Через використання апроксимувальних функцій із скінченним малим носієм матриці $[\mathbf{M}]$, $[\mathbf{H}]$ рідкозаповнені. Крім того, матриці $[\mathbf{M}]$, $[\mathbf{H}]$ і $[\mathbf{D}]$ мають блокову структуру заповнення, матричні блоки яких відповідають вузлам сітки, при чому $[\mathbf{M}]$ – симетрична додатно визначена матриця, $[\mathbf{D}]$ – нелінійна блочно-діагональна матриця, що зв'язує вектори вузлових напружень і деформацій рівняннями стану.

Для обчислення елементів матриць $[\mathbf{M}]$ і $[\mathbf{H}]$ використовували інтерполяційні квадратурні формули, в яких точки зважування збігаються з вузлами інтерполяції скінченного елемента. У цьому випадку матриця $[\mathbf{M}]$ стає діагональною і розв'язання системи матричних рівнянь (14) суттєво спрощується, тому що не потрібно застосовувати алгоритми обчислення зворотної матриці $[\mathbf{M}]$ для знаходження вектора вузлових деформацій $\{\boldsymbol{\varepsilon}(t)\}$ з першого рівняння системи (14).

Врахування статичних межових умов. Розглянемо процедуру побудови матричних рівнянь змішаного методу, яка дозволяє врахувати межові умови на частини поверхні тіла для вектора вузлових напружень і деформацій.

Уведемо до розгляду вектор поверхневих напружень $\{\mathbf{q}'\}$ для поверхневих вузлів сітки, заданий в місцевій системі координат $\mathbf{x}'$, яка не обов'язково збігається з глобальними осями $\mathbf{x}$. Компоненти вектора $\{\mathbf{q}'\}$ відповідають відомим компонентам вектора напружень на межі області і дорівнюють нулю у всіх інших випадках. Вважаємо, що $[\mathbf{T}']$ – матриця перетворення вектора вузлових напружень з глобальної координатної системи в місцеву і $[\mathbf{T}]$ – матриця зворотного перетворення з місцевої в глобальну систему координат. Тоді можна визначити напруження $\{\boldsymbol{\sigma}'\}$ на межі в місцевій системі координат $\mathbf{x}'$:

$$\{\boldsymbol{\sigma}'\} = [\mathbf{T}']\{\boldsymbol{\sigma}\}. \tag{15}$$

Для вектора $\{\boldsymbol{\sigma}'\}$ використовуємо розкладання

$$\{\boldsymbol{\sigma}'\} = \{\boldsymbol{\sigma}'_0\} + \{\mathbf{q}'\}, \tag{16}$$

де $\{\boldsymbol{\sigma}'_0\}$ – напруження, що задовольняють однорідним межовим умовам на поверхні тіла. Якщо прийняти, що напруження $\{\boldsymbol{\sigma}'_0\}$ відомі, то з застосуванням зворотного перетворення, маємо

$$\{\boldsymbol{\sigma}\} = [\mathbf{T}]\{\boldsymbol{\sigma}'\} = [\mathbf{T}](\{\boldsymbol{\sigma}'_0\} + \{\mathbf{q}'\}). \tag{17}$$

Для більшості практичних задач компоненти вектора напружень $\{\boldsymbol{\sigma}\}$ на межі відмінні від заданих компонент вектора поверхневих напружень $\{\mathbf{q}'\}$. У цьому випадку напруження $\{\boldsymbol{\sigma}'\}$ неможливо уявити у вигляді розкладання (16), оскільки не задовольняються межові умови на поверхні тіла.

Перетворимо вектор напружень $\{\boldsymbol{\sigma}\}$ таким чином, щоб забезпечити виконання статичних межових умов на поверхні тіла. Для цього використовуємо ортогональну проекцію вектора $\{\boldsymbol{\sigma}'\}$ на безліч можливих напружень, що задовольняють межовим умовам. З урахуванням того що компоненти вектора поверхневих напружень фіксовані $\{\mathbf{q}'\}$, безліч можливих напружень складається з всіляких векторів напружень, що задовольняють однорідним межовим умовам. Більше того, оскільки згадане перетворення вектора напружень не повинно призводити до порушення рівняння стану матеріалу, в проекційному рівнянні необхідно враховувати відповідне перетворення і для вектора деформацій і, отже, рівняння для побудови проекції вектора напружень $\{\boldsymbol{\sigma}'\}$ слід формулювати в енергетичній метриці, тобто з використанням скалярного добутку векторів напружень і деформацій.

Позначимо через $\{\breve{\boldsymbol{\sigma}}'\}$ ортогональну проекцію вектора напружень $\{\boldsymbol{\sigma}'\}$ на безліч можливих напружень, що задовольняють однорідним межовим умовам на поверхні тіла. Тоді з урахуванням наведених вище зауважень вектор $\{\breve{\boldsymbol{\sigma}}'\}$ визначимо на підставі тотожності:

$$\{\delta\boldsymbol{\sigma}'_0\}^T\,[\mathbf{D}']^{-1}\,\{\breve{\boldsymbol{\sigma}}'\} = \{\delta\boldsymbol{\sigma}'_0\}^T\,[\mathbf{D}']^{-1}\,\{\boldsymbol{\sigma}'\}\,, \tag{18}$$

де $[\mathbf{D}']$ – матриця, що відповідає матриці $[\mathbf{D}]$ в місцевій системі координат, $\{\delta\boldsymbol{\sigma}'_0\}$ – довільний вектор напружень, що задовольняє однорідним межовим умовам.

Оскільки вектор проекції $\{\breve{\boldsymbol{\sigma}}'\}$ задовольняє статичним межовим умовам на поверхні тіла, напруження $\{\breve{\boldsymbol{\sigma}}'\}$ можна представити у вигляді розкладання

$$\{\breve{\boldsymbol{\sigma}}'\} = \{\breve{\boldsymbol{\sigma}}'_0\} + \{\mathbf{q}'\}\,, \tag{19}$$

де $\{\delta\boldsymbol{\sigma}'_0\}$ – невідомі напруження, що задовольняють однорідним межовим умовам, $\{\mathbf{q}'\}$ – задані поверхневі напруження.

На підставі співвідношень (18), (19) отримуємо рівняння відносно вектора напружень $\{\delta\boldsymbol{\sigma}'_0\}$:

$$\{\delta\boldsymbol{\sigma}'_0\}^T\,[\mathbf{D}']^{-1}\,\{\,\breve{\boldsymbol{\sigma}}'_0\} = \{\delta\boldsymbol{\sigma}'_0\}^T\,[\mathbf{D}']^{-1}\,(\{\boldsymbol{\sigma}'\} - \{\mathbf{q}'\})\,. \tag{20}$$

Для матриці $[\mathbf{D}']^{-1}$ в рядку, що відповідає заданому напруженню на межі тіла, покладемо всі елементи нульовими і модифіковану таким чином матрицю $[\mathbf{D}']^{-1}$ позначимо $[\mathbf{S}']$. Крім того, для матриці $[\mathbf{S}']$ у стовпці, що відповідає нульовому рядку, в діагональну позицію помістимо одиницю, а всі інші елементи у стовпці покладемо нульовими. Побудовану таким чином матрицю позначимо $[\mathbf{Q}']$. З урахуванням матриць $[\mathbf{S}']$, $[\mathbf{Q}']$ з рівності (20) знаходимо

$$\{\boldsymbol{\sigma}'_0\} = [\mathbf{Q}']^{-1}\,[\mathbf{S}']\,(\{\boldsymbol{\sigma}'\} - \{\mathbf{q}'\})\,. \tag{21}$$

Відповідно до формул (15)-(17), (19) і (21) для довільного вектора напружень $\{\boldsymbol{\sigma}\}$ отримуємо вектор $\{\breve{\boldsymbol{\sigma}}\}$, що задовольняє статичним межовим умовам на поверхні тіла:

$$\{\breve{\boldsymbol{\sigma}}\} = [\mathbf{C}]\ \{\boldsymbol{\sigma}\} + [\mathbf{P}]\ \{\mathbf{q}'\}\ , \tag{22}$$

де матриці $[\,\mathbf{C}\,]$, $[\,\mathbf{P}\,]$ визначено так:

$$[\mathbf{C}] = [\mathbf{T}]\ \ [\mathbf{Q}']^{-1}[\mathbf{S}']\ \ [\mathbf{T}']\ ; \quad [\mathbf{P}] = [\mathbf{T}] - [\mathbf{T}]\ \ [\mathbf{Q}']^{-1}[\mathbf{S}']\,. \tag{23}$$

Вважаємо, що матриці $[\,\mathbf{C}\,]$, $[\,\mathbf{P}\,]$ мають блочно-діагональну структуру заповнення, яка відповідає вузлам сітки. Для поверхневих вузлів, в яких враховують межові умови для напружень, діагональні блоки цих матриць визначають за допомогою співвідношень (23), а для всіх інших вузлів – вони дорівнюють одиничній і нульовій матриці відповідно.

Вектор вузлових деформацій $\{\breve{\boldsymbol{\varepsilon}}\}$ визначаємо через напруження $\{\breve{\boldsymbol{\sigma}}\}$ за допомогою співвідношення

$$\{\breve{\boldsymbol{\varepsilon}}\} = [\mathbf{D}]^{-1}\{\breve{\boldsymbol{\sigma}}\} + \{\boldsymbol{\xi}\}\,. \tag{24}$$

Отже, на підставі формулювання (14) і співвідношень (22)-(24) отримуємо систему нелінійних матричних рівнянь змішаного методу з урахуванням статичних межових умов на поверхні тіла:

$$\begin{gathered}
\{\boldsymbol{\varepsilon}(t)\} = [\mathbf{M}]^{-1}\,[\mathbf{H}]\ \{\mathbf{u}(t)\}\ ; \\
\{\boldsymbol{\sigma}(t)\} = [\mathbf{D}\ (\{\breve{\boldsymbol{\varepsilon}}(t)\}\,,\ \{\boldsymbol{\xi}(t)\})]\ (\{\boldsymbol{\varepsilon}(t)\} - \{\boldsymbol{\xi}(t)\})\ ; \\
\{\boldsymbol{\sigma}^0(t)\} = [\mathbf{C}\ (\{\breve{\boldsymbol{\varepsilon}}(t)\}\,,\ \{\boldsymbol{\xi}(t)\})]\ \{\boldsymbol{\sigma}(t)\}\ ; \\
\{\boldsymbol{\sigma}^S(t)\} = [\mathbf{P}(\{\breve{\boldsymbol{\varepsilon}}(t)\}\,,\ \{\boldsymbol{\xi}(t)\})]\ \{\mathbf{q}'(t)\}\ ; \\
\{\breve{\boldsymbol{\sigma}}(t)\} = \{\boldsymbol{\sigma}^0(t)\} + \{\boldsymbol{\sigma}^S(t)\}\ ; \\
\{\breve{\boldsymbol{\varepsilon}}(t)\} = [\mathbf{D}\ (\{\breve{\boldsymbol{\varepsilon}}(t)\}\,,\ \{\boldsymbol{\xi}(t)\})]^{-1}\ \{\breve{\boldsymbol{\sigma}}(t)\} + \{\boldsymbol{\xi}(t)\}\ ; \\
[\mathbf{H}]^T\{\breve{\boldsymbol{\sigma}}(t)\} = \{\boldsymbol{\rho}(t)\}\,.
\end{gathered} \tag{25}$$

Системи нелінійних рівнянь (14), (25) визначають матричне формулювання змішаного методу для розв’язання задач неізотермічної термопластичності щодо вузлових переміщень, деформацій і напружень.

Для розв’язання систем рівнянь (14), (25) розроблено та реалізовано спеціальні крокові-ітераційні алгоритми. Встановлено, що сформульована умова стійкості змішаного методу забезпечує збіжність і стійкість запропонованих ітераційних процедур. Одержано результати з оптимізації швидкості збіжності ітераційних алгоритмів і показано можливість їх ефективної практичної реалізації.

Деякі приклади побудови стійких змішаних апроксимацій МСЕ для розв’язання двох- і тривимірних задач, а також вирази для елементів розв’язувальних матриць наведено в [14, 15]. Результати розв’язання модельних задач теорії пружності, пластичності і механіки руйнування, що одержані на основі пропонованої змішаної апроксимації, та їх порівняння з аналітичними розв'язками і результатами розрахунків за методом переміщень, наведено в [9, 14-17].

Аналіз модельних і досвід розв'язання практичних задач свідчать про ефективність змішаного методу у задачах про вигинання, концентрацію напружень, а також у разі розв'язання пружно-пластичних задач з розвиненими зонами пластичних деформацій. Врахування статичних межових умов на поверхні тіла призводить до покращеної змішаної апроксимації напружень і деформацій особливо за пружно-пластичного моделювання. Застосування змішаної апроксимації до розв'язання задач теорії тріщин дозволяє отримати більш точні і стійкі розрахункові значення локальних параметрів руйнування порівняно з класичним методом переміщень. На розріджених і помірних за розмірами сітках застосування змішаного методу до розрахунку тіл складної конфігурації дозволяє отримати більш точні результати порівняно з класичним варіантом МСЕ. Для задач, що мають незначний градієнт напружень, результати розрахунків на основі змішаного і класичного підходів МСЕ близькі між собою. Результати чисельного аналізу підтвердили ефективність розроблених методів розрахунку і програмного забезпечення до розв'язання широкого спектра наукових і прикладних задач термомеханіки.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Brezzi F.* On the existence uniqueness and approximation of saddle–point problems arising from Lagrangian multipliers // RAIRO. – 1974. – R.2 – P. 129 – 151.
2. *Babuska I.* Error Bounds for Finite Element Method // Numer. Math. – 1971. – 16, № 3. – P. 322 – 333.
3. *Ворошко П.П.* Формулировка вариационных принципов типа Рейсснера для классических задач термоупругости // Докл. АН УССР. – 1984. – № 3. – С. 31 – 33.
4. *Ворошко П.П.* Смешанные вариационные формулировки задач теории упругости и их реализация методом конечных элементов // Пробл. прочности. – 1985. – № 1. – С. 100 – 105.
5. *Сахаров А.С.* Моментная схема конечных элементов (МСКЭ) с учётом жёстких смещений // Сопротивление материалов и теория сооружений. – 1974. – Вып. 24. – С. 147 – 156.
6. *Сахаров А.С., Альтенбах И.* Метод конечных элементов в механике твердых тел. – К.: Вища школа, 1982. – 478 с.
7. *Уманский С.Э.* Общая теория и практическое применение смягченно-смешанных схем метода конечных элементов // Пробл. прочности. – 1984. – № 12. – С. 83 – 89.
8. *Zienkiewicz O.C., Taylor R.L.* The Finite Element Method. – Butterworth-Heinemann. – Oxford; Auckland; Boston; Johannesburg; Melbourne; New Delhi. – 5th ed., 2000. – Vol. 1 – 3. – 1482 p.
9. *Чирков А.Ю.* Смешанная схема метода конечных элементов для решения краевых задач теории упругости и малых упругопластических деформаций. – К.: Ин–т пробл. прочности им. Г.С.Писаренко НАН Украины, 2003. – 250 с.
10. *Чирков А.Ю.* Построение двухслойных схем интегрирования уравнений пластического течения в теории процессов деформирования по траектории малой кривизны // Пробл. прочности. – 2012. – № 6. – С. 93 – 124.

11. *Чирков А.Ю.* Анализ краевых задач, описывающих неизотермические процессы упруго-пластического деформирования с учётом истории нагружения // Пробл. прочности. – 2006. – № 1. – С. 69 – 99.
12. *Чирков А.Ю.* Некоторые приложения смешанного метода конечных элементов к решению задач механики деформируемого тела // Кибернетика и системный анализ. – 2012. – № 5. – С. 126–141.
13. *Чирков А.Ю.* Смешанная проекционно-сеточная схема метода конечных элементов для решения краевых задач, описывающих неизотермические процессы упругопластического деформирования // Пробл. прочности. – 2007. – № 3. – С. 87 – 117.
14. *Чирков А.Ю.* Построение смешанной аппроксимации к решению двухмерных задач теории упругости методом конечных элементов // Пробл. прочности. – 2003. – № 6. – С. 93 – 126.
15. *Чирков А.Ю., Кобельский С.В., Звягинцева А.А.* Построение смешанной аппроксимации МКЭ для решения пространственных задач теории упругости // Надёжность и долговечность машин и сооружений. – 2008. – Вып. 31. – С. 195 – 207.
16. *Чирков А.Ю.* Применение смешанной схемы метода конечных элементов к решению задач линейной механики разрушения // Вестник НТУУ «КПИ», Машиностроение. – 2007. – № 50. – С. 91 – 101.
17. *Чирков А. Ю.* Расчетный анализ модельных задач теории трещин на основе смешанной схемы метода конечных элементов // Надёжность и долговечность машин и сооружений. – 2012. – Вып. 35. – С. 200 – 208.

REFERENCES

1. *Brezzi F.* On the existence uniqueness and approximation of saddle–point problems arising from Lagrangian multipliers // RAIRO. – 1974. – R.2 – P. 129 – 151.
2. *Babuska I.* Error Bounds for Finite Element Method // Numer. Math. – 1971. – 16, № 3. – P. 322 – 333.
3. *Voroshko P.P.* Formulirovka variatsionnyih printsipov tipa Reyssnera dlya klassicheskih zadach termouprugosti (Formulation of Reissner-type variational principles for classical problems of thermoelasticity) // Dokl. AN USSR. – 1984. – № 3. – S. 31 – 33.
4. *Voroshko P.P.* Smeshannyie variatsionnyie formulirovki zadach teorii uprugosti i ih realizatsiya metodom konechnyih elementov (Mixed variational formulations of problems of the theory of elasticity and their realization of the finite-element method) // Probl. prochnosti. – 1985. – № 1. – S. 100 – 105.
5. *Saharov A.S.* Momentnaya shema konechnyih elementov (MSKE) s uchyotom zhyostkih smescheniy (A moment finite-element scheme (MFES) that allows for rigid-body displacements) // Soprotivlenie materialov i teoriya sooruzheniy. – 1974. – Vyip. 24. – S. 147 – 156.
6. *Saharov A.S.*, *Altenbah I.* Metod konechnyih elementov v mehanike tverdyih tel (Finite-Element Method in Mechanics of Solid Bodies). – K.: Vischa shkola, 1982. – 478 s.
7. *Umanskiy S.E.* Obschaya teoriya i prakticheskoe primenenie smyagchenno-smeshannyih shem metoda konechnyih elementov (General theory and practical application of modified-mixed schemes of the finite elements method) // Probl. prochnosti. – 1984. – № 12. – S. 83 – 89.
8. *Zienkiewicz O.C., Taylor R.L.* The Finite Element Method. – Butterworth-Heinemann. – Oxford; Auckland; Boston; Johannesburg; Melbourne; New Delhi. – 5th ed., 2000. – Vol. 1 – 3. – 1482 p.
9. *Chirkov A.Yu.* Smeshannaya shema metoda konechnyih elementov dlya resheniya kraevyih zadach teorii uprugosti i malyih uprugoplasticheskih deformatsiy (A Mixed Scheme of Finite-Element Method for Solving Boundary-Value Problems of Elasticity and Small Elastoplastic Strains). – K.: In–t probl. prochnosti im. G.S.Pisarenko NAN Ukrainyi, 2003. – 250 s.
10. *Chirkov A.Yu.* Postroenie dvuhsloynyih shem integrirovaniya uravneniy plasticheskogo techeniya v teorii protsessov deformirovaniya po traektorii maloy kriviznyi (Construction of two-level integration schemes for the equations of plasticity in the theory of deformation along the paths of small curvature) // Probl. prochnosti. – 2012. – № 6. – S. 93 – 124.

11. *Chirkov A.Yu.* Analiz kraevyih zadach, opisyivayuschih neizotermicheskie protsessyi uprugoplasticheskogo deformirovaniya s uchyotom istorii nagruzheniya (Analysis of boundary-value problems describing the non-isothermal processes of elastoplastic deformation taking into account the loading history) // Probl. prochnosti. – 2006. – № 1. – S. 69 – 99.
12. *Chirkov A.Yu.* Nekotoryie prilozheniya smeshannogo metoda konechnyih elementov k resheniyu zadach mehaniki deformiruemogo tela (Some applications of the mixed finite-element method to the solution of problems in solid mechanics) // Kibernetika i sistemnyiy analiz. – 2012. – № 5. – S. 126 – 141.
13. *Chirkov A.Yu.* Smeshannaya proektsionno-setochnaya shema metoda konechnyih elementov dlya resheniya kraevyih zadach, opisyivayuschih neizotermicheskie protsessyi uprugoplasticheskogo deformirovaniya (Mixed projection-mesh scheme of the finite-element method to solve boundary-value problems describing the non-isothermal processes of elastoplastic deformation) // Probl. prochnosti. – 2007. – № 3. – S. 87 – 117.
14. *Chirkov A.Yu.* Postroenie smeshannoy approksimatsii k resheniyu dvuhmernyih zadach teorii uprugosti metodom konechnyih elementov (Mixed approximation scheme of the finite-element method for the solution of two-dimensional problems of the elasticity theory) // Probl. prochnosti. – 2003. – № 6. – S. 93 – 126.
15. *Chirkov A.Yu., Kobelskiy S.V., Zvyagintseva A.A.* Postroenie smeshannoy approksimatsii MKE dlya resheniya prostranstvennyih zadach teorii uprugosti (Construction of mixed approximation of FEM for the solution of dimensional problems of elasticity theory) // Nadyozhnost i dolgovechnost mashin i sooruzheniy. – 2008. – Vyip. 31. – S. 195 – 207.
16. *Chirkov A.Yu.* Primenenie smeshannoy shemyi metoda konechnyih elementov k resheniyu zadach lineynoy mehaniki razrusheniya (Application of mixed scheme of finite element method to the solution of problems of linear mechanics of fracture) // Vestnik NTUU «KPI», Mashinostroenie. – 2007. – № 50. – S. 91 – 101.
17. *Chirkov A.Yu.* Raschetnyiy analiz modelnyih zadach teorii treschin na osnove smeshannoy shemyi metoda konechnyih elementov (Computational analysis of model problems of crack theory based on mixed scheme of finite element method) // Nadyozhnost i dolgovechnost mashin i sooruzheniy. – 2012. – Vyip. 35. – S. 200 – 208.

УДК 539.4

Чирков О.Ю. **Розвиток змішаного методу скінченних елементів до розв'язання крайових задач термомеханіки**// Опір матеріалів і теорія споруд. – 2015. – Вип. 95. – С. 16–34.

Розвинуто загальну теорію змішаних схем метода скінченних елементів для розв'язання крайових задач термомеханіки неоднорідних середовищ, зокрема, нелінійних задач, що описують неізотермічні процеси пружно-пластичного деформування за криволінійними траєкторіями малої кривизни. Із застосуванням апарату функціонального аналізу досліджено коректність змішаних проекційно-сіткових алгоритмів і на цій основі сформульовано умови, що забезпечують стійкість та збіжність змішаної апроксимації для напружень, деформацій і переміщень. Встановлено, що змішаний метод призводить до більш точних розрахункових розподілів напружень і деформацій порівняно із класичним методом переміщень. Побудовано спеціальні скінченні елементи, що забезпечують стійкість та збіжність пропонованих змішаних апроксимацій. Отримано систему розв'язувальних рівнянь змішаного методу з урахуванням точного задоволення статичним межовим умовам на поверхні тіла, для розв'язання яких запропоновано економічні та стійкі кроково-ітераційні обчислювальні алгоритми.

Ключові слова: метод скінченних елементів, неізотермічні процеси пружно-пластичного деформування, змішана схема метода скінченних елементів.

Бібліогр. 17 назв.

Чирков А.Ю. **Развитие смешанного метода конечных элементов к решению краевых задач термомеханики** // Сопротивление материалов и теория сооружений. – 2015. – Вып. 95. – С. 16–34.

Развита общая теория смешанных схем метода конечных элементов для решения краевых задач термомеханики, в частности нелинейных задач, описывающих неизотермических процессы упругопластического деформирования по криволинейным траекториям малой кривизны. С применением аппарата функционального анализа исследована корректность смешанных проекционно-сеточных алгоритмов и на этой основе сформулированы условия, обеспечивающие устойчивость и сходимость смешанной аппроксимации для напряжений, деформаций и перемещений. Установлено, что смешанный метод приводит к более точным расчётным распределениям напряжений и деформаций по сравнению с классическим методом перемещений. Построены специальные конечные элементы, обеспечивающие устойчивость и сходимость смешанной аппроксимации. Получена система разрешающих уравнений смешанного метода с учетом точного удовлетворения статическим граничным условиям на части поверхности тела, для решения которых предложены экономичные и устойчивые шагово-итерационные алгоритмы.

Ключевые слова: метод конечных элементов,неизотермические процессы упруго-пластического деформирования, смешанная схема метода конечных элементов.

Chirkov A.Y. **Development of mixed finite element method for the solution of thermo-mechanical boundary problems** // Strength of materials and the theory of structures. – 2015. – Issue. 95. – P. 16–34.

A general theory of mixed schemes of finite element method has been developed for the solution of thermo-mechanical boundary problems of inhomogeneous media, in particular nonlinear problems that describe the non-isothermal processes of elasto-plastic deformation using curved trajectories with small radius of curvature. Using the device for functional analysis the correctness of mixed projection-mesh algorithms is studied and based on it the conditions that provide stability and convergence of mixed approximation for stresses, strains and displacements have been laid down. It is found that the mixed method results in more accurate computational distribution of stresses and strains compared with the classical method of displacements. Special finite elements have been constructed, which ensure stability and convergence of the proposed mixed approximations. The system of equations for mixed method with consideration of specific fulfillment of static boundary conditions on the body surface has been obtained. The efficient and stable step-iteration computational algorithms have been proposed for the solution of this system.

Keywords: finite element method, non-isothermal processes of elasto-plastic deformation , mixed finite element method.

ЧИРКОВ Олександр Юрійович, *д-р. техн. наук, ст. наук. співр., провідн. наук. співр. Інституту проблем міцності ім. Г.С.Писаренка НАН України*
Адреса робоча: *01014 Україна, м. Київ, вул. Тимірязєвська 2, Інститут проблем міцності ім. Г.С.Писаренка НАН України, Чиркову Олександру Юрійовичу*
Роб. тел.: +38 (044) 286- 48- 57
мобільний тел.: +38 (093) 718-17-39