

УДК 539.3

МАТРИЦЯ ЖОРСТКОСТІ І ВЕКТОР ВУЗЛОВИХ РЕАКЦІЙ КРУГОВОГО СКІНЧЕННОГО ЕЛЕМЕНТА З ЧИСЕЛЬНИМ ІНТЕГРУВАННЯМ

О.І. Гуляр¹,
д-р техн. наук

С.О. Пискунов¹,
д-р техн. наук,

О.О. Шкриль¹,
канд. техн. наук,

К.С. Романцова¹,
аспірант

¹*Київський національний університет будівництва і архітектури, Київ
Повітрофлотський просп., 31, м. Київ. 03680*

На основі варіаційного принципу можливих переміщень розроблено круговий СЕ зі змінною площею поперечного перерізу у напрямку твірної, який за рахунок чисельного інтегрування враховує змінність фізико-механічних і геометричних параметрів у поперечному перерізі. У процесі розв'язання тестових задач була підтверджена правильність результатів, які дозволяють отримувати розроблений варіант СЕ.

Ключові слова: просторова задача, напіваналітичний метод скінчених елементів, матриця жорсткості, чисельне інтегрування.

Вступ. Значна кількість об'єктів мають складну геометричну форму, і крім того, характеризуються змінністю фізико-механічних параметрів вздовж просторових координат (наприклад внаслідок їхнього відхилення від номінальних значень або наявності вирізів, порожнин або зон руйнування). Використання в цьому випадку в дискретних моделях МСЕ скінчених елементів (СЕ) із сталими фізико-механічними параметрами, які дорівнюють відповідним значенням в центрі поперечного перерізу СЕ, може спричинити значне спотворення результатів. У такому разі необхідно надмірно згущувати СЕ сітку або застосовувати інші підходи, наприклад, такі як чисельне інтегрування або інтегрування у замкнену вигляді, що дозволяють враховувати змінність фізико-механічних параметрів. Проте при інтегруванні у замкненому вигляді значно ускладнюється розрахункові співвідношення, тому більш зручним є використання чисельного інтегрування.

В даній роботі описується варіант скінченного елемента, матриця жорсткості і вузлові реакції якого визначаються на основі чисельного інтегрування в області поперечного перерізу.

Скінчений елемент з чисельним інтегруванням в поперечному

перерізі. Опис процесу деформування просторових тіл здійснюється у відповідності до варіаційного принципу можливих переміщень. Рівняння рівноваги системи N СЕ, що апроксимують досліджуваний об'єкт, має вигляд:

$$\sum_{n=1}^N (\delta W_n - \delta A_n) = 0.$$

Варіація енергії деформації одного СЕ може бути записана у вигляді:

$$\delta W = \int_{x^1=-\frac{1}{2}}^{x^1=\frac{1}{2}} \int_{x^2=-\frac{1}{2}}^{x^2=\frac{1}{2}} \int_{x^3=-1}^{x^3=1} \tilde{\sigma}^{ij} \delta \tilde{\epsilon}_{ij} \sqrt{g} dx^1 dx^2 dx^3. \quad (1.1)$$

Представимо фізичні деформації через ненормовані коефіцієнти розкладу деформацій в ряд Маклорена з урахуванням змінності компонент метричного тензора в поперечному перетині СЕ

$$\tilde{\epsilon}_{ij} = \frac{1}{\sqrt{g_{ii}g_{jj}}} \xi_{ij};$$

де

$$\begin{aligned} \xi_{\alpha(\alpha)} &= \overset{\circ}{\epsilon}_{\alpha(\alpha)} + \left(\overset{\circ}{\epsilon}_{\alpha(\alpha),(3-\alpha)} - \overset{\circ}{\epsilon}_{\alpha(\alpha)} \overset{\circ}{h}_{\alpha(\alpha),(3-\alpha)} \right) x^{(3-\alpha)}; \quad \xi_{12} = \overset{\circ}{\epsilon}_{12}; \\ \xi_{\alpha 3} &= \overset{\circ}{\epsilon}_{\alpha 3} + \left(\overset{\circ}{\epsilon}_{\alpha 3,(3-\alpha)} - \frac{1}{2} \overset{\circ}{\epsilon}_{\alpha 3} \left(\overset{\circ}{h}_{\alpha\alpha,(3-\alpha)} + \overset{\circ}{h}_{33,(3-\alpha)} \right) \right) x^{(3-\alpha)}; \\ \xi_{33} &= \overset{\circ}{\epsilon}_{33} + \left(\overset{\circ}{\epsilon}_{33,\alpha} - \overset{\circ}{\epsilon}_{33} \overset{\circ}{h}_{33,\alpha} \right) x^{\alpha}. \end{aligned} \quad (1.2)$$

Тоді формулу (1.1) із використанням нефізичних компонентів напружень та деформацій представимо в матричному вигляді

$$\delta W = \int_{x^1=-\frac{1}{2}}^{x^1=\frac{1}{2}} \int_{x^2=-\frac{1}{2}}^{x^2=\frac{1}{2}} \int_{x^3=-1}^{x^3=1} \delta \{ \xi \}^T \{ \sigma \} \sqrt{g} dx^1 dx^2 dx^3, \quad (1.3)$$

де

$$\begin{aligned} \{ \xi \}^T &= \{ \xi_{11} \quad 2\xi_{12} \quad \xi_{22} \quad 2\xi_{23} \quad 2\xi_{13} \quad \xi_{33} \}, \\ \{ \sigma \} &= \{ \sigma_{11} \quad \sigma_{12} \quad \sigma_{22} \quad \sigma_{23} \quad \sigma_{13} \quad \sigma_{33} \}. \end{aligned}$$

Співвідношення (1.2), що описують залежність між ненормованими компонентами деформацій – складовими коефіцієнтів розкладення фізичних деформацій у ряд Маклорена і коефіцієнтами розкладення переміщень за поліномами, у матричній формі мають наступний вигляд:

$$\{\xi\} = \sum_{l=0}^L \left([B_1] \varphi^{(l)} + [B_2] \varphi_3^{(l)} \right) \{u_l\}; \quad (1.4)$$

де

$$\begin{aligned} \{u\}_l^T &= \{u_{l(-1;-1)}^T u_{l(1;-1)}^T u_{l(-1;1)}^T u_{l(1;1)}^T\}; \\ \{u\}_{l(S_1, S_2)}^T &= \{u_{1(S_1, S_2)}^l\} \{u_{2(S_1, S_2)}^l\} \{u_{3(S_1, S_2)}^l\}; \\ [B_\alpha] &= \left[[B_\alpha]^{(-1;-1)} \quad [B_\alpha]^{(1;-1)} \quad [B_\alpha]^{(-1;1)} \quad [B_\alpha]^{(1;1)} \right]. \end{aligned}$$

Склад матриць $[B_\alpha]^{(S_1, S_2)}$ є наступним:

$$[B_1]^{(S_1, S_2)} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} S_1 z_{,1}^{\circ 1} + (B_1)_1 x^2 & \frac{1}{2} S_1 z_{,1}^{\circ 2} + (B_1)_2 x^2 & 0 \\ \frac{1}{2} \left(S_2 z_{,1}^{\circ 1} + S_1 z_{,2}^{\circ 1} \right) & \frac{1}{2} \left(S_2 z_{,1}^{\circ 2} + S_1 z_{,2}^{\circ 2} \right) & 0 \\ \frac{1}{2} S_2 z_{,2}^{\circ 1} + (B_1)_3 x^1 & \frac{1}{2} S_2 z_{,2}^{\circ 2} + (B_1)_4 x^1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} z_{,3}^{\circ 3} \left(S_2 \frac{z_{,2}^{\circ 2'}}{z_{,2}^{\circ 2}} \right) + (B_1)_5 x^1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} z_{,3}^{\circ 3} \left(S_1 \frac{z_{,1}^{\circ 2'}}{z_{,2}^{\circ 2}} \right) + (B_1)_6 x^2 \\ 0 & \frac{1}{4} z_{,3}^{\circ 2} \left(z_{,3}^{\circ 3'} \right)^2 + (B_1)_7 x^1 + (B_1)_8 x^2 & 0 \end{bmatrix}$$

де

$$(B_1)_1 = S_1 S_2 z_{,1}^{\circ 1'} + \frac{S_1}{2} z_{,12}^{\circ 1'} - \frac{1}{2} S_1 z_{,2}^{\circ 1'} h_{11,2};$$

$$(B_1)_2 = S_1 S_2 z_{,1}^{\circ 2'} + \frac{S_1}{2} z_{,12}^{\circ 2'} - \frac{1}{2} S_1 z_{,2}^{\circ 2'} h_{11,2};$$

$$(B_1)_3 = S_1 S_2 z_{,2}^{\circ 1'} + \frac{S_2}{2} z_{,12}^{\circ 1'} - \frac{1}{2} S_1 z_{,2}^{\circ 1'} h_{11,2};$$

$$(B_1)_4 = S_1 S_2 z_{,2}^{\circ 2'} + \frac{S_1}{2} z_{,12}^{\circ 2'} - \frac{1}{2} S_1 z_{,2}^{\circ 2'} h_{11,2};$$

$$\begin{aligned}
 (B_1)_5 &= \frac{1}{2} z_{,3}^{3'} \left[2 \cdot S_1 S_2 - \frac{1}{z_{,2}^{2'}} \left(z_{,12}^{2'} + z_{,2}^{2'} \left(2S_1 - \frac{z_{,1}^{2'}}{z_{,2}^{2'}} \right) \right) - \frac{1}{2} \left(S_2 - \frac{z_{,2}^{2'}}{z_{,2}^{2'}} \right) \left(h_{22,1} + h_{33,1} \right) \right]; \\
 (B_1)_6 &= \frac{1}{2} z_{,3}^{3'} \left(\left(2 \cdot S_1 S_2 - \frac{1}{z_{,2}^{2'}} \left(z_{,12}^{2'} + z_{,1}^{2'} \left(2S_2 - \frac{z_{,2}^{2'}}{z_{,2}^{2'}} \right) \right) - \frac{1}{2} \left(S_1 - \frac{z_{,1}^{2'}}{z_{,2}^{2'}} \right) \left(h_{11,2} + h_{33,2} \right) \right) \right. \\
 &\quad (B_1)_7 = \frac{1}{4} \left(z_{,3}^{3'} \right)^2 \left(z_{,1}^{2'} + 2S_1 z_{,2}^{2'} - z_{,2}^{2'} h_{33,1} \right) \\
 &\quad (B_1)_8 = \frac{1}{4} \left(z_{,3}^{3'} \right)^2 \left(z_{,2}^{2'} + 2S_2 z_{,1}^{2'} - z_{,1}^{2'} h_{33,2} \right) \\
 \left. \left[B_2 \right]^{(S_1, S_2)} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} z_{,2}^{1'} + (B_2)_1 x^1 & \frac{1}{4} z_{,2}^{2'} + (B_2)_2 x^1 & 0 \\ \frac{1}{4} z_{,1}^{1'} + (B_2)_3 x^1 & \frac{1}{4} z_{,1}^{2'} + (B_2)_4 x^1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} z_{,3}^{3'} + (B_2)_5 x^1 + (B_2)_6 x^2 \end{bmatrix},
 \end{aligned}$$

де

$$(B_2)_1 = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} z_{,12}^{1'} + S_1 z_{,1}^{1'} - \frac{1}{4} z_{,2}^{1'} \left(h_{22,1} + h_{33,1} \right) \right);$$

$$(B_2)_2 = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} z_{,12}^{2'} + S_1 z_{,1}^{2'} - \frac{1}{4} z_{,2}^{2'} \left(h_{22,1} + h_{33,1} \right) \right);$$

$$(B_2)_3 = \frac{1}{2} z_{,1}^{1'} \left(\frac{1}{2} z_{,12}^{1'} + S_2 - \frac{1}{4} \left(h_{11,2} + h_{33,2} \right) \right);$$

$$(B_2)_4 = \frac{1}{2} z_{,1}^{2'} \left(\frac{1}{2} z_{,12}^{2'} + S_2 - \frac{1}{4} \left(h_{11,2} + h_{33,2} \right) \right);$$

$$(B_2)_5 = \frac{1}{2} z_{,3}^{3'} S_1 - \frac{1}{4} z_{,3}^{3'} h_{33,1};$$

$$(B_2)_6 = \frac{1}{2} z_{,3}^{3'} S_2 - \frac{1}{4} z_{,3}^{3'} h_{33,2}.$$

Підставляючи (1.4) в (1.3), запишемо варіацію енергії деформації

елемента через переміщення $\{u\}$ та вузлові реакції $\{r_\sigma\}$:

$$\delta W = \sum_{l=0}^L \delta \{u\}_l^T \{r_\sigma\}_l, \quad (1.5)$$

де

$$\{r_\sigma\}_l = \int_{x^1=-\frac{1}{2}}^{x^1=\frac{1}{2}} \int_{x^2=-\frac{1}{2}}^{x^2=\frac{1}{2}} \left([B_1]^T \int_{x^3=-1}^{x^3=1} \{\sigma\} \varphi^{(l)} dx^3 + [B_2]^T \int_{x^3=-1}^{x^3=1} \{\sigma\} \varphi_3^{(l)} dx^3 \right) \sqrt{g} dx^1 dx^2. \quad (1.6)$$

Виконуючи чисельне інтегрування, отримаємо формулу для обчислення вузлових реакцій скінченного елемента загального вигляду із змінними в перерізі $x^3 = const$ механічними та геометричними параметрами:

$$\{r_\sigma\} = \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \left[\left([B_1]^T \{\sigma_1\}_i + [B_2]^T \{\sigma_2\}_j \right) \sqrt{g} H_i H_j \right]_{(x_i^1, x_j^2)}, \quad (1.7)$$

де $\{\sigma_1\}_i = \sum_{m=1}^M \left(\{\sigma\} \varphi^{(l)} H_m \right)_{(x_m^3)}$, $\{\sigma_2\}_j = \sum_{m=1}^M \left(\{\sigma\} \varphi_3^{(l)} H_m \right)_{(x_m^3)}$, I, J, M - кількість

точок інтегрування по x_i^1, x_j^2, x_m^3 , відповідно, H_i, H_j, H_m - вагові функції, x_i^1, x_j^2, x_m^3 - координати точок інтегрування.

Для виведення матриці жорсткості скінченного елемента представимо зв'язок між напружень і деформацій у вигляді:

$$\{\sigma\} = [D] \{\xi\}. \quad (1.8)$$

де

$$[D] = \begin{bmatrix} D^{1111} & D^{1112} & D^{1122} & D^{1133} \\ D^{1211} & D^{1212} & D^{1222} & D^{1233} \\ D^{2211} & D^{2212} & D^{2222} & D^{2233} \\ D^{3311} & D^{3312} & D^{3322} & D^{3333} \end{bmatrix}.$$

Елементи матриці $[D]$ визначаються згідно формул (2.7).

Варіація енергії деформації можна записати як:

$$\delta W = \int_{x^1=-\frac{1}{2}}^{x^1=\frac{1}{2}} \int_{x^2=-\frac{1}{2}}^{x^2=\frac{1}{2}} \int_{x^3=-1}^{x^3=1} \delta \{\xi\}^T [D] \{\xi\} \sqrt{g} dx^1 dx^2 dx^3. \quad (1.9)$$

$$\delta W = \int_{x^1=-\frac{1}{2}}^{x^1=\frac{1}{2}} \int_{x^2=-\frac{1}{2}}^{x^2=\frac{1}{2}} \int_{x^3=-1}^{x^3=1} \sum_{l=0}^L \delta \{u\}_l^T \left([B_1]^T \varphi^{(l)} + [B_2]^T \varphi_{,3}^{(l)} \right) [D] \times \\ \times \sum_{n=0}^L \{u\}_n \left([B_1] \varphi^{(n)} + [B_2] \varphi_{,3}^{(n)} \right) \sqrt{g} dx^1 dx^2 dx^3. \quad (1.10)$$

Інтегруючи в (1.10) по x^3 і позначимо:

$$G_1^{ln} = \sum_{m=1}^M \left(\varphi^{(l)} \varphi^{(n)} H_m \right)_{(x_m^3)}, \quad G_2^{ln} = \sum_{m=1}^M \left(\varphi_{,3}^{(l)} \varphi^{(n)} H_m \right)_{(x_m^3)}, \\ G_3^{ln} = \sum_{m=1}^M \left(\varphi^{(l)} \varphi_{,3}^{(n)} H_m \right)_{(x_m^3)}, \quad G_4^{ln} = \sum_{m=1}^M \left(\varphi_{,3}^{(l)} \varphi_{,3}^{(n)} H_m \right)_{(x_m^3)}.$$

Подаючи деформації через коефіцієнти розкладу переміщень, отримаємо:

$$\delta W = \sum_{l=0}^L \delta \{u\}_l^T [k]_{ln} \{u\}_n, \quad (1.11)$$

де $[k]_{ln}$ – матриця жорсткості:

$$[k]_{ln} = \int_{x^1=-\frac{1}{2}}^{x^1=\frac{1}{2}} \int_{x^2=-\frac{1}{2}}^{x^2=\frac{1}{2}} \left([B_1]^T [D] [B_1] G_1^{ln} + [B_2]^T [D] [B_1] G_2^{ln} + \right. \\ \left. + [B_1]^T [D] [B_2] G_3^{ln} + [B_2]^T [D] [B_2] G_4^{ln} \right) \sqrt{g} dx^1 dx^2. \quad (1.12)$$

Після інтегрування по x^1 і x^2 , отримаємо формулу для обчислення коефіцієнтів матриці жорсткості кругового СЕ із змінними в перерізі $x^3 = const$ геометричними та фізичними параметрами:

$$[k]_{ln} = \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \left([B_1]^T [D] [B_1] G_1^{ln} + [B_2]^T [D] [B_1] G_2^{ln} + \right. \\ \left. + [B_1]^T [D] [B_2] G_3^{ln} + [B_2]^T [D] [B_2] G_4^{ln} \right) \sqrt{g} H_i H_j (x_i^1, x_j^2). \quad (1.13)$$

Як відомо з попередніх публікацій, чисельне інтегрування є ефективним для тонкостінних об'єктів, у яких відношення товщини стінки до середнього радіуса в межах $t/r=1/8 \dots 1/10$, але викликає інтерес ефективність застосування чисельного інтегрування до тіл, відношення у яких виходить за приведені вище межі. Тому для визначення кола задач, у яких доцільно використовувати чисельне інтегрування, були розглянуті наступні тестові приклади.

1. Розрахунок нескінченної труби навантаженої внутрішнім тиском (рис. 1). Середній радіус $R_0=2.2\text{см}$, середньою товщиною стінок $t_0=2.4\text{см}$. Розглянуто три варіанти зміни модуля пружності по товщині стінки: а) постійний модуль пружності; б) модуль пружності зменшується з радіусом на 1%; в) модуль пружності радіусом ся по висоті у два рази; коефіцієнт Пуассона $\nu = 0.3$. Еталонний розв'язок може бути отриманий на основі відомих аналітичних співвідношень [5].

Використані для дослідження збіжності дискретні моделі налічували 4, 6 і 12 СЕ, при цьому характер збіжності результатів для всіх випадків є однаковим. Отримані основні НМСЕ результати наведені у вигляді графіків співставлення величин радіальні напружень по радіусу для трьох названих випадків зміни модуля пружності на рис. 2.

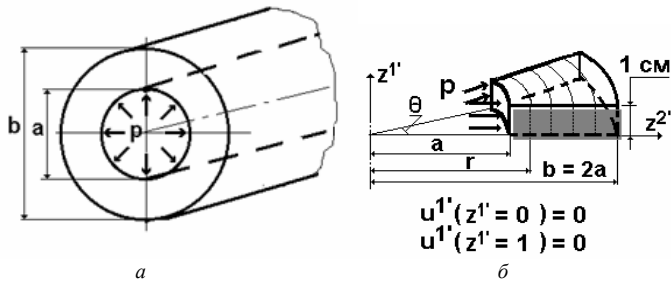


Рис.1. Труба зі змінним модулем пружності по товщині стінки: розрахункова схема (а) і дискретна модель НМСЕ (б).

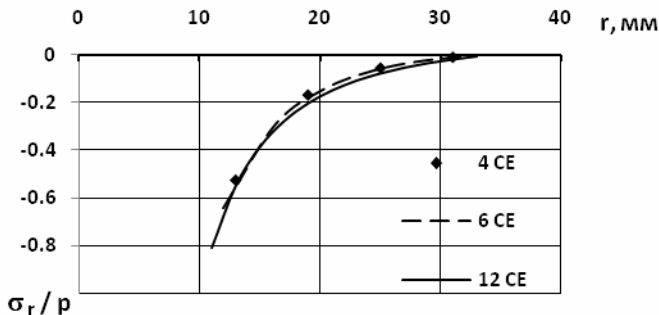


Рис.2. Аналіз збіжності НМСЕ при зміні модуля пружності по радіусу на 1%

2. Розрахунок нескінченного циліндра, навантаженого внутрішнім тиском із середнім радіус $R_0=10\text{см}$, середня товщина стінок $t_0=2\text{см}$. Модуль пружності $E=1$; коефіцієнт Пуассона $\nu = 0.3$

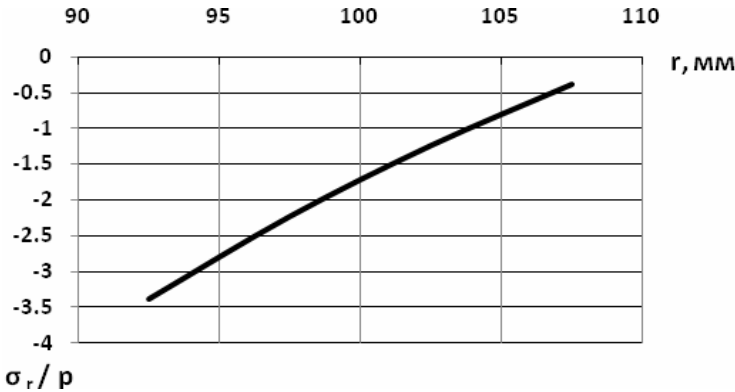


Рис.3. Графік розподілення радіальних напружень в циліндрі при $R_0=10\text{ см}$, середня товщина стінок $t_0=2\text{ см}$

Таким чином, як можна побачити з графіків, у першому випадку спостерігається значна нелінійність у розподіленні напружень по радіусу. Тому збіжність розв'язку при використанні СЕ із чисельним членуванням буде мати такий саме характер, як і при використанні СЕ із сталими фізико-механічними характеристиками, тобто чисельне інтегрування буде неефективним. У другому випадку, незважаючи на те, що відношення середньої товщини стінки до середнього радіусу становить $1/5$ розподілення напружень дуже близьке до лінійного, тобто чисельне інтегрування у перерізі СЕ є доцільним і ефективним.

Таким чином, використанням чисельного інтегрування може бути ефективним не тільки у випадках, які лежать в теоретично встановлених межах співвідношення товщини і середнього радіусу, а і при співвідношенні порядку $1/5$. Отримані результати збігаються із отриманими в роботі [6] для оболонкових конструкцій і пластин.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Баженов В.А., Гуляр А.И., Сахаров А.С., Топор А.Г.* Полуаналитический метод конечных элементов в механике деформируемых тел. – К.: НИИСМ, 1993. – 376 с.
2. *Баженов В.А., Гуляр О.И., Пискунов С.О., Сахаров О.С.* Напіваналітичний метод скінченних елементів в задачах руйнування просторових тіл: Монографія – К.: КНУБА, 2005. – 298 с.
3. *Блох В.И.* Теория упругости. – Харьков: Изд-во ХГУ, 1964. – 483 с.
4. *Писаренко Г.С.* Сопротивление материалов / Писаренко Г.С., Агаев В.А Квитка А.Л., Попков В.Г. Уманский Э.С. – Киев: Вища школа, 1979. - 696 с.

5. Пискунов С.О., Солодей І.І., Максим'юк Ю.В., Солоденко А.Д. Особливості використання моментної схеми скінчених елементів (МССЕ) при лінійних розрахунках оболонок і пластин // — Опір матеріалів і теорія споруд. — 2013. - Вип. 91. - С. 60-68.
6. Сахаров А.С. Метод конечных элементов в механике твердых тел / А.С. Сахаров, В.Н. Кислокий, В.В. Киричевский. — К. : Вища шк., 1982. — 480 с.

REFERENCES

1. Bazhenov V.A., Hulyar A.Y., Sakharov A.S., Topor A.H. Poluanalytycheskyy metod konechnykh elementov v mekhanike deformyruemykh tel (Semi-analytical finite element method in the mechanics of deformable bodies) – К. : NYYSM, 1993. – 376s.
2. Bazhenov V.A., Gulyar O.I., Py'skunov S.O., Saxarov O.S. Napivanalitichny'j metod skinchenny'x elementiv v zadachax rujnuvannya prostoro'v'x til: Monografiya – К.: KNUBA, 2005. – 298 s.
3. Blokh V.Y. Teoriya uprugosti „Theory of elasticity” / V.Y. Blokh. – Kh.: Yzd. Khar'kovsk. Hos. Unyversyteta, 1964. – 484 s.
4. Pisarenko G.S. Soprotivlenie materialov / Pisarenko G.S., Agaev V.A Kvitka A.L., Popkov V.G. Umanskiy E.S. – Kiev: Vischa shkola, 1979. - 696 s.
5. Piskunov S.O., Solodey I.I., Maksim'yuk Y.V., Solodenko A.D. Osoblivosti vikoristannya momentnoyi shemi skinchenih elementiv (MSSE) pri liniynih rozrahunkah obolonok i plastin // — Opir materialiv i teoriya sporud. — 2013. - Vip. 91. - S. 60-68.
6. Sakharov A.S. Metod konechnykh elementov v mekhanike tverdyykh tel (The Finite Element Method in Mechanics of Solids) / A.S. Sakharov, V.N. Kyslokiy, V.V. Kyrychevskyy. – К.: Vyshcha shk., 1982. – 480 s.

Guliar O., Piskunov S., Shkri'l' A., Romantsova K.

STIFFNESS MATRIX AND THE VECTOR OF NODAL REACTIONS OF CIRCULAR FINITE ELEMENT WITH NUMERICAL INTEGRATION

On the basis of virtual work variations a new finite element with a variable crosssectional area along a generation, which due to numerical integration takes into account the variability of mechanical and geometrical parameters in cross-section was developed. In the process of test problem solving the correctness of the results, which allows to get this version of FE, was confirmed.

Keywords: spatial problem, semianalitic finite element method, stiffness matrix, vector of nodal reactions, numerical integration.

Гуляр А.И., Пискунов С. О., Шкріль О.О., Романцова К. С.

МАТРИЦА ЖЕСТКОСТИ И ВЕКТОР УЗЛОВЫХ РЕАКЦИЙ КРУГОВОГО КОНЕЧНОГО ЭЛЕМЕНТА С ЧИСЛЕННЫМ ИНТЕГРИРОВАНИЕМ

На основании вариационного принципа возможных перемещений разработан конечный элемент с переменной площадью в направлении образующей, который за счет численного интегрирования учитывает изменение физико-механических и геометрических параметров в поперечном сечении. В процессе решения тестовых задач была подтверждена правильность результатов, которые позволяет получать разработанный вариант КЭ.

Ключевые слова: пространственная задача, полуаналитический метод конечных элементов, матрица жесткости, вектор узловых реакций, численное интегрирование.