УДК 539.3

ПРО ОДИН АЛГОРИТМ РОЗВ'ЯЗАННЯ ПОЧАТКОВО-ГРАНИЧНИХ ЗАДАЧ ДЛЯ РІВНЯННЯ НЕСТАЦІОНАРНОЇ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ

В.К. Чибіряков[1],
д-р техн. наук, зав кафедри вищої математики

А.М. Станкевич[1],
канд. техн. наук, зав. кафедри опору матеріалів

В.Ф. Мельничук[1],
асистент кафедри вищої математики

[1]*Київський національний університет будівництва та архітектури. Київ*

У даній роботі запропоновано для розв'язання диференціальних рівнянь задач теплопровідності використовувати метод скінченних різниць по часовій координаті та метод дискретної ортогоналізації С.Г. Годунова для кожного часового шару по просторовій координаті.

Ключові слова: нестаціонарна теплопровідність, метод скінченних різниць, метод С.Г. Годунова, неявний алгоритм, точність, стійкість.

При розрахунках напружено-деформованого стану (НДС) несучих конструкцій під дією температурних впливів в рамках теорії термопружності передбачається дослідження проводити в два етапи. На першому розв'язується задача теплопровідності, а на другому по знайденому температурному полю знаходяться характеристики НДС. Таким чином розв'язання задач теплопровідності є суттєвим елементом дослідження напружено-деформованого стану несучого об'єкта.

Задача теплопровідності для деформівного твердого тіла є однією з основних задач математичної фізики і тому для її розв'язання розроблено багато аналітичних та наближених методів. Тим не менш в наш час продовжується розробка методів розв'язання цих задач, правда, перевага віддається чисельним методам та алгоритмам. Для розв'язання стаціонарних задач теплопровідності, диференціальні рівняння яких визначені в просторовій області, використовують різні чисельні методи, що зводять (редукують) вихідні рівняння до систем рівнянь меншої вимірності по просторовим координатам, а то й до алгебраїчних рівнянь. Один з досить поширених методів зниження вимірності вихідних рівнянь є так званий метод прямих. Головна ідея цього метода полягає в зведенні багатовимірної по просторових координатах задачі до одновимірної. У наш час цей метод набуває особливого значення, оскільки розроблено високоефективний стійкий метод розв’язання одновимірних граничних задач – метод дискретної ортогоналізації С.К. Годунова [2].

Правда, при знаходженні температурних полів частіше необхідно враховувати нестаціонарний характер(залежність від часу цих полів). Для дослідження нестаціонарної задачі теплопровідності ставиться початково-гранична задача. Для розв’язання початково-граничних задач розроблено чисельні алгоритми, за допомогою яких шукаються наближені розв’язки цих задач [1]. Як відомо, ці алгоритми використовують метод скінченних різниць для апроксимації частинних похідних по часовій координаті та метод скінченних різниць або метод скінченних елементів по просторових координатах. Ці алгоритми поділяються на явні та неявні. Явні алгоритми значно простіші, але є умовно стійкими і в зв’язку з цим вимагають використання занадто малих кроків по часовій координаті. Неявні алгоритми, як правило, стійкі, але на кожному кроці за часом вимагають розв’язування рівнянь по просторових координатах. Тут використовуються деякі чисельні алгоритми, які розроблені для розв’язання граничних задач по одній просторовій змінній (частіше це різні методи прогонки).

Використання згаданих алгоритмів ускладнюється, якщо розв’язувальні рівняння мають коефіцієнти, що залежать від просторових координат. Застосування в цих випадках метода скінченних різниць по просторових координатах вимагає різницевого наближення мішаних похідних та врахування законтурних точок, що значно ускладнює алгоритм та знижує точність.

Уже відомо [2], що для розв’язання одновимірних граничних задач, які описуються системами звичайних диференціальних рівнянь навіть із змінними коефіцієнтами найкращим (з точки зору алгоритмічності та точності) є метод дискретної ортогоналізації С.Г. Годунова. У зв’язку з цим виникає необхідність застосування позитивних рис метода дискретної ортогоналізації для побудови ефективного алгоритму розв’язання початково-граничних задач нестаціонарної теплопровідності, що одновимірні по просторових координатах. При цьому передбачається застосування по часовій координаті метода скінченних різниць, як звичайно. При цьому бажано зберегти неявний характер алгоритму.

Побудову алгоритму розглянемо на прикладі початково-граничної задачі для одновимірних по просторових координатах рівнянь теплопровідності

$$\begin{aligned}&\rho c\frac{\partial T}{\partial t}=\lambda_T\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+Q(x,y),\quad T(x,t):(x,t)\in[0,l]\times[0,\infty)\\&\text{при } t=0\quad T(x,0)=T_0(x).\end{aligned}\qquad(1)$$

В якості граничних умов беремо умови конвективного теплообміну як універсальні природні граничні умови

$$\text{при } x=0 \quad q_x - q_x^0 = \alpha_T^0 (T(0,t) - T^0(t)), \tag{2}$$

$$\text{при } x=l \quad q_x - q_x^l = \alpha_T^l (T(l,t) - T^l(t)). \tag{3}$$

Ці умови охоплюють умови першого роду – для цього необхідно $\alpha_T \to \infty$, та умови другого роду – тут необхідно задати $\alpha_T = 0$.

Тут позначено: $T(x,t)$ - температурна функція, λ_T - коефіцієнт теплопровідності, ρ - густина, c - питома теплоємність, $Q(x,t)$ - розподілені теплові джерела, α_T^0, α_T^l - коефіцієнти тепловіддачі при $x=0$ та $x=l$ відповідно, $T^0(t), T^l(t)$ - температура оточуючого середовища при $x=0$ та $x=l$ відповідно.

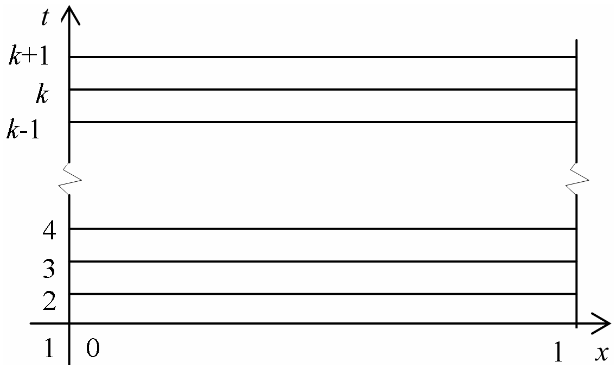

Рис. 1. Часові шари неперервних функцій

Вихідні рівняння по просторовій координаті запишемо у формі Коші, як це необхідно при використанні метода С.К. Годунова. Тобто, введемо нову функцію-компоненту q_x теплового потоку, щоб рівняння були записані як система диференціальних рівнянь по просторовій координаті першого порядку

$$\begin{cases} \dfrac{\partial T}{\partial x} = -\dfrac{1}{\lambda_T} q_x, \\ \dfrac{\partial q_x}{\partial x} = \rho c \dfrac{\partial T}{\partial t} + Q(x,t). \end{cases} \tag{4}$$

Область визначення задачі по змінній t розіб'ємо на часові шари і будемо розрахункові функції розглядати неперервними по x та дискретними по t, що підкреслюється рис. 1.

По часовій координаті похідну наблизимо часткою скінченних різниць першого порядку точності (різниці «назад»). При цьому рівняння розглядаємо на шарі $k+1$

$$\begin{cases} \dfrac{dT_{k+1}}{dx} = -\dfrac{1}{\lambda_T} q_{x,k+1}, \\ \dfrac{dq_{x,k+1}}{dx} = -\rho c \dfrac{T_{k+1} - T_k}{\Delta t} + Q_{k+1} \end{cases} \tag{5}$$

або в матричній формі, що зручно при застосуванні метода С.К. Годунова

$$\frac{d}{dx}\begin{bmatrix} T_{k+1} \\ q_{x,k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\dfrac{1}{\lambda_T} \\ -\dfrac{\rho c}{\Delta t} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_{k+1} \\ q_{x,k+1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \dfrac{\rho c}{\Delta t} T_k + Q_{k+1} \end{bmatrix}. \tag{6}$$

Тут остання матриця-стовпчик розглядається в якості правої частини, оскільки T_k - значення температурної функції на попередньому шарі, які вважаються відомими, Q_{k+1} розглядається на шарі $k+1$, але це задана функція.

Розрахунок починається з другого шару ($k+1=2$), оскільки на першому шарі ($k=1$) значення функції T відомі з початкових умов. За методом дискретної ортогоналізації з використанням граничних умов (2),(3) розв'язується система звичайних диференціальних рівнянь (6), в результаті чого знаходяться значення розв'язувальних функцій на шарі $k+1=2$. Ці значення використовуються для знаходження значення розв'язувальних функцій на шарі $k+1=3$ і так далі. Розрахунок продовжується, поки температурна функція не виходить на стаціонарний режим.

У якості прикладу розглянуто задачу теплопровідності з такими вихідними даними

$$\rho = 2.5, \quad c = 1, \quad \lambda_T = 6, \quad l = 1, \quad \alpha_0 = 10^{10}, \quad \alpha_l = 10^{10}$$

при раптовому підвищенні на 20°с температури зовнішнього середовища при $x=0$ та $x=l$. На рис. 2 показано зміну температурної функції в часі для точки в першій чверті l.

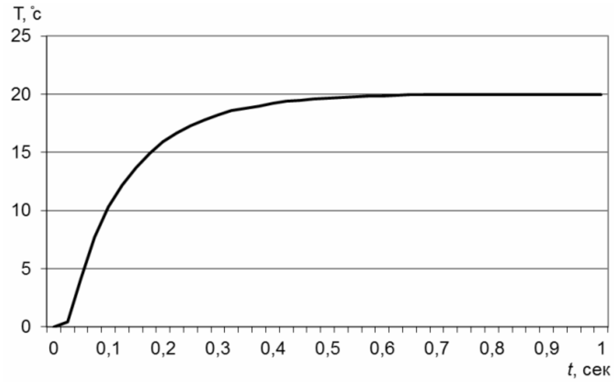

Рис. 2. Зміна температури в часі

При тестуванні алгоритму, що пропонується, помічене специфічне явище. Для дуже малих значень Δt та досить великих значень Δt алгоритм втрачає стійкість. Проміжні значення Δt забезпечують стійкість та достатню точність дослідження нестаціонарного процесу.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Рихтмайер Р., Мортон К.* Разностные методы решения краевых задач: Пер. с англ. - М.:Мир, 1972, 420 с.
2. *Годунов С.К.* Уравнения математической физики. — М.: Наука, 1971. — 416 с.
3. *Григоренко Я.М., Влайков Г.Г., Григоренко А.Я.* Численно-аналитическое решение задач механики оболочек на основе различных моделей / НАН Украины. Ин-т механики им. С. П. Тимошенко. Техн. центр. — К.: Академпериодика, 2006. — 472 с.

REFERENCES

1. *Richtmyer R. Morton K.* Difference methods for solving boundary value problems: Trans. from English. - M: Mir, 1972, 420 p.
2. *Godunov S.K.* Equations of mathematical physics. - M.: Nauka, 1971. - 416 p.
3. *Grigorenko Y.M., Vlaicu G.G., Grigorenko A.J.* Numerically-analytical solution of problems of mechanics of shells on the basis of various models / NAS. Institute of Mechanics. Timoshenko. Tech. Center. - K.: Academperiodika, 2006. - 472 p.

Chybiryakov V.K., Stankevich A.M., Melnychuk V.F.

ABOUT ONE ALGORITHM OF SOLVING AN INITIAL-BOUNDARY PROBLEM FOR THE EQUATION OF NONSTATIONARY HEAT CONDUCTION

In this paper we propose to solve differential equations of heat conduction problems using finite difference method in time coordinates and the method of discrete orthogonalization S.G. Godunov for each time layer to the spatial coordinate.

Keywords: unsteady heat conduction, finite difference method, method SG Godunov implicit algorithm accuracy and stability.

Чибиряков В.К., Станкевич А.Н., Мельничук В.Ф.

ОБ ОДНОМ АЛГОРИТМЕ РЕШЕНИЯ НАЧАЛЬНО-ГРАНИЧНЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ НЕСТАЦИОНАРНОЙ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

В данной работе предложено для решения дифференциальных уравнений задач теплопроводности использовать метод конечных разностей по временной координате и метод дискретной ортогонализации С. Годунова для каждого временного слоя по пространственной координате.

Ключевые слова: нестационарная теплопроводность, метод конечных разностей, метод С. Годунова, неявный алгоритм, точность, устойчивость.