

УДК 539.3

СТІЙКІСТЬ І ВЛАСНІ КОЛИВАННЯ НЕОДНОРІДНИХ ОБОЛОНОК З УРАХУВАННЯМ НАПРУЖЕНОГО СТАНУ

В.А. Баженов¹,
д-р техн. наук

О.П. Кривенко¹,
канд. техн. наук

А.Д. Легостаєв¹,
канд. техн. наук

¹*Київський національний університет будівництва і архітектури
Повітрофлотський просп., 31, м. Київ. 03680; e-mail: olakor@ukr.net*

Робота присвячена проблемі розробки єдиної методології на основі ефективного чисельного аналізу задач стійкості та власних коливань широкого класу неоднорідних оболонок, як тонких, так і середньої товщини. У задачах про власні коливання враховується наявність попереднього напруження конструкції від дії статичних навантажень, що істотно впливає на спектр власних коливань і дає можливість визначати точки біфуркації та значення критичної сили при втраті стійкості за динамічним критерієм.

Ключові слова: тонка пружна оболонка, геометрично нелінійне деформування, стійкість, власні коливання, універсальний просторовий скінченний елемент.

Вступ. Тонкостінні пружні оболонки широко застосовуються у будівництві, авіабудуванні та у інших галузях техніки і відносяться до особливо відповідальних несучих конструкцій. Розповсюджене використання оболонок, як одного з головних конструктивних елементів, пов'язано з їхньою високою несучою спроможністю, легкістю та міцністю. Оболонкові конструкції можуть поєднувати у собі різноманітні конструктивні неоднорідності: ребра та накладки, підкріплені та невідкріплені отвори, виїмки, канали, місцеві потовщення, зломи серединної поверхні, багат шарову структуру матеріалу й інші особливості.

Недоліком тонкостінних оболонкових конструкцій є можливість втрати ними стійкості. Тому дослідження нелінійного деформування та стійкості оболонки є важливою задачею. При цьому визначення частот і форм власних коливань оболонки дає змогу прослідкувати процес деформування конструкції при різних рівнях навантаження.

До теперішнього часу є безліч публікацій, присвячених розрахунку гнучких оболонкових систем. За останнє десятиріччя кількість робіт за тематикою значно зросла [1-12]. Серед них велика увага приділяється вивченню пружних оболонок ступінчасто-змінної товщини [1,2,4,9,10,12].

Дослідженню власних коливань оболонок з урахуванням переднапруженого стану присвячені поодинокі роботи [11,12]. У зв'язку з цим питання, що пов'язані з розробкою моделей нелінійного деформування тонких пружних оболонок неоднорідної структури, та проведення на їхній основі комплексного дослідження стійкості та власних коливань оболонок представляються актуальними і важливими.

Постановка задачі. Розрахунки оболонок як систем з ускладненою структурою викликають не тільки обчислювальні, але й принципові методичні труднощі. Їхнє вирішення приводить до необхідності створення нових універсальних розрахункових моделей і розробки нових уточнених методів дослідження оболонок [1-3,5,7-9], які мають ширше коло використання, ніж традиційні методи розрахунку окремих класів оболонок. Найуспішніше ця проблема може бути розв'язана методом скінчених елементів (МСЕ) на основі розробки та застосування для неоднорідних оболонок універсальних просторових скінчених елементів (СЕ). Метою роботи є:

- розробка комплексного підходу до розв'язування статичних задач геометрично нелінійного деформування та втрати стійкості широкого класу пружних неоднорідних оболонок складної форми та структури у поєднанні з методикою розрахунку неоднорідних оболонок на власні коливання з урахуванням переднапруженого стану на кожному кроці термосилового навантаження;
- застосування розробленого методу до розрахунку тонкої оболонки на стійкість з визначенням форм і частот власних коливань.

1. Методика комплексного чисельного аналізу нелінійного деформування та стійкості неоднорідних оболонок з визначенням власних коливань на кроці навантаження. Для розв'язування динамічних задач зазвичай застосовують два основні методи: статичний і енергетичний. Статичний метод ґрунтується на використанні рівнянь динамічної рівноваги, які відрізняються від рівнянь статичної рівноваги додатковим врахуванням сил інерції. Енергетичний метод ґрунтується на застосуванні закону збереження енергії.

При побудові розв'язувальних рівнянь за МСЕ у роботі використовується перший підхід із застосуванням принципу можливих переміщень Лагранжа у поєднанні з принципом Даламбера [3, 13-17]

$$\sum_{FE} (\delta W_{FE} - (\delta K_{FE} + \delta Q_{FE})) = 0, \quad (1)$$

де K_{FE} , W_{FE} та Q_{FE} – роботи сил інерції, внутрішніх і зовнішніх сил СЕ, \sum_{FE} – сума за скінченими елементами скінченноелементної моделі оболонки (СЕМО).

Обчислення віртуальної роботи внутрішніх сил виконується за співвідношенням [1, 2]

$$\delta W_{FE} = \int_{V_{FE}} \sigma^{ij} \delta \varepsilon_{ij} dv. \quad (2)$$

Віртуальна робота сил інерції СЕ визначається як [16]

$$\delta K_{FE} = - \int_{V_{FE}} \rho \ddot{u}^i \delta u^i dv. \quad (3)$$

При дослідженні напружено-деформованого стану оболонки, який виникає від дії термосилового навантаження, віртуальну роботу внутрішніх сил СЕ з врахуванням закону Дюамеля–Неймана подамо у вигляді [1, 2]

$$\begin{aligned} \delta W_{FE} &= \int_{V_{FE}} \sigma^{ij} \delta \varepsilon_{ij}^e dv = \int_{V_{FE}} \sigma^{ij} \delta (\varepsilon_{ij} - \varepsilon_{ij}^T) dv = \int_{V_{FE}} \sigma^{ij} \delta \varepsilon_{ij} dv = \\ &= \int_{V_{FE}} \bar{\sigma}^{ij} \delta \varepsilon_{ij} dv - \int_{V_{FE}} \sigma^{ij} \delta \varepsilon_{ij}^T dv = \delta \bar{W}_{FE} - \delta W_{FE}^T, \end{aligned} \quad (4)$$

де ε_{kl}^e – пружні деформації, поява яких у тілі спричинена виникненням внутрішніх напружень σ^{ij} , що відповідають узагальненому закону Гука

$$\sigma^{ij} = C^{ijkl} \varepsilon_{kl}^e; \quad (5)$$

C^{ijkl} – компоненти тензора пружних сталей; $\varepsilon_{kl}^T = \alpha_{kl} T$ – температурні деформації, що зумовлені зміною температури тіла на величину T щодо його початкової температури T_0 ;

$$\bar{\sigma}^{ij} = C^{ijkl} \varepsilon_{kl}, \quad \sigma^{ij} = C^{ijkl} \varepsilon_{kl}^T. \quad (5')$$

Таким чином, (4) складається з двох доданків, які, маючи однакову структуру, виконують різні ролі при розв'язуванні задачі термопружності.

Перший інтеграл являє собою віртуальну роботу внутрішніх сил $\delta \bar{W}_{FE}$ від повних деформацій

$$\varepsilon_{kl} = \varepsilon_{kl}^e + \varepsilon_{kl}^T, \quad (6)$$

що залежать від шуканих функцій переміщень

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^l + \varepsilon_{ij}^n = \frac{1}{2} \left(C_j^{k'} \frac{\partial u^{k'}}{\partial x^i} + C_i^{k'} \frac{\partial u^{k'}}{\partial x^j} \right) + \frac{1}{2} \frac{\partial u^{k'}}{\partial x^i} \frac{\partial u^{k'}}{\partial x^j}. \quad (7)$$

На основі цього інтегралу визначається ліва частина нелінійної системи розв'язувальних рівнянь МСЕ [1, 2, 16].

Другий інтеграл являє собою віртуальну роботу внутрішніх сил, що залежить від температурних деформацій. На основі цього інтегралу отримується так звана матриця еквівалентних температурних навантажень [1, 2], яка в правій частині системи розв'язувальних рівнянь додається до матриці силових вузлових навантажень. Тому співвідношення (1) подається як

$$\sum_{FE} (\delta \bar{W}_{FE} - (\delta K_{FE} + \delta P_{FE})) = 0, \quad (8)$$

де

$$\delta P_{FE} = \delta Q_{FE} + \delta W_{FE}^T. \quad (8')$$

Для задач статички співвідношення (8) набуває вигляду

$$\sum_{FE} (\delta \bar{W}_{FE} - \delta P_{FE}) = 0, \quad (9)$$

а для задач щодо вільних коливань –

$$\sum_{FE} (\delta \bar{W}_{FE} - \delta K_{FE}) = 0. \quad (10)$$

У роботі задача з визначення власних частот і форм коливань неоднорідної оболонки розв'язується кроковим методом за два етапи.

На першому етапі розв'язується статична задача нелінійного деформування оболонки на кроці навантаження за методикою [1, 2], що реалізує розв'язання нелінійного рівняння (9). На цьому етапі при відповідних приростах навантаження знаходиться напружено-деформований стан (НДС) оболонки: деформована форма (нові координати) та прирости полів переміщень і напружень.

На другому етапі – навантаження «знімається», тобто навантаження приймається рівним нулю при новій формі та наявності переднапруженого стану оболонки.

На цьому етапі власні частоти та форми коливань обчислюються до появи від'ємного значення основного тону (найнижчої) частоти, що відповідає моменту втрати стійкості оболонки.

За динамічним критерієм навантаження, якому відповідає поява від'ємного значення основного тону частоти, приймається за критичне [18]. Надалі визначення частот власних коливань оболонки не виконується, а досліджується лише її закритична поведінка. Точність розрахунку на власні коливання оболонки з урахуванням переднапруженого стану підтверджується збігом величини верхнього критичного навантаження, з отриманим в інший спосіб.

Таким чином, розроблений підхід дозволяє комплексно досліджувати геометрично нелінійне деформування та стійкість тонких і середньої товщини пружних оболонок неоднорідної структури та вивчати малі

коливання оболонок відносно відлікового деформованого стану, що викликаний довільним статичним навантаженням, з урахуванням великих переміщень і переднапруженого стану.

2. Методика розв'язування геометрично нелінійних задач статики неоднорідних оболонок. З єдиних методологічних позицій просторової теорії термопружності в [1, 2] розроблено теоретичні положення, метод та обчислювальні процедури чисельного дослідження процесів геометрично нелінійного деформування, втрати стійкості та закритичної поведінки широкого класу тонких неоднорідних оболонок, що знаходяться в умовах складного термосилового навантаження. Під неоднорідністю оболонки розуміються її геометричні особливості у вигляді неперервно-змінної та ступінчасто-змінної товщини, зломів, отворів і неоднорідність матеріалу вздовж товщини й у плані.

Дослідження процесів нелінійного деформування оболонок виконуються на основі загальної лагранжевої постановки варіаційної задачі у приростах, коли траєкторія векторів деформацій та напружень будується за компонентами приростів скінченних деформацій та приростів напружень у базисі лагранжевої (супутньої) системи координат.

Задача полягає в знаходженні нового НДС оболонки (приростів напружень та приростів скінченних деформацій у актуальній конфігурації) від дії довільних зовнішніх сил у приростах. Співвідношення, що в компактній тензорній формі описують НДС оболонки, подаються в місцевій криволінійній x^i та глобальній декартовій $x^{i'}$ системах координат (рис. 1).

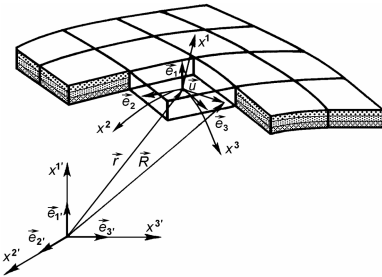


Рис. 1

Використана модель пружного нелінійно деформівного суцільного середовища при великих переміщеннях $u^{k'}$ і малих деформаціях ε_{kl} . Матеріали шарів оболонки розглядаються як лінійно-пружні, властивості яких відповідають узагальненому закону Дюамеля–Неймана.

Особливості НДС тонкої оболонки враховані двома гіпотезами: щодо сталості нормальних напружень обтиснення волокон шарів за напрямком товщини (слабкіша, ніж класична гіпотеза) та деформівної прямої [1, 2]. Остання гіпотеза забезпечує стиковку елементів без порушення сумісності за переміщеннями і координатами у процесі деформування. Шари оболонки жорстко поєднані між собою в монолітний пакет, деформуючись спільно без проковзування та відриву по поверхнях

контактів, на яких виконується вимога рівності компонент вектора переміщень. Температурне поле в об'ємі оболонки вважається відомою та незалежною від НДС функцією координат.

На основі стандартного ізопараметричного просторового СЕ з полілінійними функціями форми для координат і переміщень розроблено універсальний просторовий скінченний елемент з додатковими змінними параметрами, на базі якого побудована розрахункова модель, що враховує неоднорідності матеріалу та геометричні особливості різних конструктивних елементів оболонки (змінність товщини, зломи та гранованість обшивки, складну форму ребер, накладок, виїмок, отворів, багатшарову структуру матеріалу).

Для побудови розв'язувальних скінченноелементних співвідношень застосована моментна схема скінченних елементів (МССЕ) [1, 2, 14]. Для ізопараметричного просторового СЕ з полілінійними функціями форми для координат і переміщень відповідно до МССЕ функції повних деформацій ε_{ij} подаються у вигляді відрізків рядів Маклорена в околі центру СЕ ($x^1 = x^2 = x^3 = 0$). Відповідно до положень МССЕ, в рядах утримані тільки ті члени, які точно обчислюються і точно враховують зміщення елемента як жорсткого тіла, при цьому для даного СЕ деформації ε_{ij} в межах елемента визначаються як лінійні функції від x^i .

Розроблено алгоритм автоматизованого проходження діаграми “навантаження–прогин” (“ $\bar{q} - \bar{u}$ ”) із визначенням особливих точок (точок розгалуження та критичних) для задач стійкості неоднорідних оболонок при комбінованій дії температурного та силового навантажень. Виконано чисельне обґрунтування достовірності та точності отримуваних нелінійних розв'язків, наприклад [1, 2, 19-24].

3. Врахування напруженого стану неоднорідної оболонки при визначенні власних коливань. Для визначення частот і форм власних коливань оболонки будемо розглядати оболонку в процесі крокового навантаження. У процесі коливань переміщення точок середовища оболонки будемо відраховувати від рівноважного стану.

На s -му кроці поле термосилового навантаження (8²)

$$P_s = P_{s-1} + \Delta_s P \quad (11)$$

рівноважується відповідним полем напружень

$$\sigma_s^{ij} = \sigma_{s-1}^{ij} + \Delta_s \sigma^{ij}, \quad (12)$$

де $P_{s-1} = \sum_{k=1}^{s-1} \Delta_k P$ та $\overset{\circ}{\sigma}_{s-1}^{ij} = \sum_{k=1}^{s-1} \Delta_k \sigma^{ij}$ – навантаження та напруження, що

накопичені на $(s-1)$ кроках; $\Delta_s \sigma^{ij} = C^{ijkl} \varepsilon_{kl}^e$ – приріст напружень на s -му кроці навантаження $\Delta_s P$; C^{ijkl} – компоненти тензора пружних сталих, що відповідають s -му кроку; ε_{kl}^e – приріст пружних деформацій, що спричиняє приріст напружень $\Delta_s \sigma^{ij}$.

Обмежимося розглядом малих коливань оболонкової конструкції відносно деформованого рівноважного стану. Процедура лінеаризації співвідношень (10) полягає у наступному.

Враховуючи (4), (5'), (8') та (12), а також співвідношення

$$\bar{\sigma}_s^{ij} = \overset{\circ}{\sigma}_{s-1}^{ij} + \Delta_s \bar{\sigma}^{ij}, \quad (12')$$

подаємо віртуальну роботу внутрішніх сил від приросту повних деформацій $\delta \bar{W}_{CE}$ (4) у вигляді

$$\delta \bar{W}_{FE} = \delta \bar{W}_{FE}^1 + \delta \bar{W}_{FE}^2 + \delta \bar{W}_{FE}^3 + \delta \bar{W}_{FE}^4 + \delta \bar{W}_{FE}^5, \quad (13)$$

де

$$\begin{aligned} \delta \bar{W}_{FE}^1 &= \int_{V_{FE}} C^{ijkp} \varepsilon_{kp}^l \delta \varepsilon_{ij}^l dv, & \delta \bar{W}_{FE}^2 &= \int_{V_{FE}} \overset{\circ}{\sigma}^{ij} \delta \varepsilon_{ij}^n dv, & \delta \bar{W}_{FE}^3 &= \int_{V_{FE}} \overset{\circ}{\sigma}^{ij} \delta \varepsilon_{ij}^l dv, \\ \delta \bar{W}_{FE}^4 &= \int_{V_{FE}} C^{ijkp} \varepsilon_{kp}^n \delta \varepsilon_{ij}^l dv, & \delta \bar{W}_{FE}^5 &= \int_{V_{FE}} C^{ijkp} (\varepsilon_{kp}^l + \varepsilon_{kp}^n) \delta \varepsilon_{ij}^n dv. \end{aligned}$$

Третій доданок у (13) вилучаємо з розгляду, оскільки на $(s-1)$ -му кроці напруження $\overset{\circ}{\sigma}_{s-1}^{ij}$ врівноважене навантаженням P_{s-1} . Четвертий та п'ятий доданки мають нелінійні члени третього та четвертого порядків відносно функції переміщень і тому при лінеаризації нелінійних рівнянь ними нехтуємо. Таким чином, після лінеаризації нелінійних співвідношень (13) маємо

$$\delta \bar{W}_{FE} = \delta \bar{W}_{FE}^1 + \delta \bar{W}_{FE}^2. \quad (14)$$

Віртуальну роботу внутрішніх сил від приросту повних деформацій $\delta \bar{W}_{FE}$ (14) з використанням закону Коші–Гріна (7) та узагальненого закону Гука (5), враховуючи властивість симетрії компонент тензора пружних сталих, подаємо у вигляді

$$\begin{aligned}
\delta \bar{W}_{FE} &= \int_{V_{FE}} \overset{\circ}{\sigma}^{ij} \delta \varepsilon_{ij} dv = \int_{V_{FE}} C^{ijkp} \varepsilon_{kp}^l \delta \varepsilon_{ij}^l dv + \int_{V_{FE}} \overset{\circ}{\sigma}^{ij}_{s-1} \delta \varepsilon_{ij}^n dv = \\
&= \int_{V_{FE}} \left[C^{ijkp} \frac{1}{2} \left(C_l^{n'} \frac{\partial u^{n'}}{\partial x^k} + C_k^{n'} \frac{\partial u^{n'}}{\partial x^l} \right) \frac{1}{2} \delta \left(C_j^{m'} \frac{\partial u^{m'}}{\partial x^i} + C_j^{m'} \frac{\partial u^{m'}}{\partial x^j} \right) + \right. \\
&\quad \left. + \overset{\circ}{\sigma}^{ij}_{s-1} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u^{n'}}{\partial x^j} \delta \frac{\partial u^{n'}}{\partial x^i} + \frac{\partial u^{n'}}{\partial x^i} \delta \frac{\partial u^{n'}}{\partial x^j} \right) \right] dv = \\
&= \int_{V_{FE}} \left(C^{ijkp} C_p^{n'} C_j^{m'} \frac{\partial u^{n'}}{\partial x^k} \delta \frac{\partial u^{m'}}{\partial x^i} + \overset{\circ}{\sigma}^{ij}_{s-1} \frac{\partial u^{n'}}{\partial x^j} \delta \frac{\partial u^{m'}}{\partial x^i} \right) dv = \\
&= \int_{V_{FE}} \left(C^{ijkp} C_p^{n'} C_j^{m'} \frac{\partial u^{n'}}{\partial x^l} \delta \frac{\partial u^{m'}}{\partial x^i} + \overset{\circ}{\sigma}^{ik}_{s-1} \delta^{n'm'} \frac{\partial u^{n'}}{\partial x^k} \delta \frac{\partial u^{m'}}{\partial x^i} \right) dv = \\
&= \int_{V_{FE}} \left(C^{ijkp} + \overset{\circ}{\sigma}^{ik}_{s-1} C_{r'}^p C_{r'}^j \right) C_l^{n'} C_j^{m'} \frac{\partial u^{n'}}{\partial x^k} \delta \frac{\partial u^{m'}}{\partial x^i} dv = \\
&= \int_{V_{FE}} \left(C^{ijkp} + \overset{\circ}{\sigma}^{ik}_{s-1} g^{pj} \right) C_p^{n'} C_j^{m'} \frac{\partial u^{n'}}{\partial x^k} \delta \frac{\partial u^{m'}}{\partial x^i} dv = \\
&= \int_{V_{FE}} \tilde{C}^{ijkp} C_p^{n'} C_j^{m'} \frac{\partial u^{n'}}{\partial x^k} \delta \frac{\partial u^{m'}}{\partial x^i} dv, \tag{15}
\end{aligned}$$

де

$$\tilde{C}^{ijkp} = C^{ijkp} + \overset{\circ}{\sigma}^{ik}_{s-1} g^{pj}. \tag{15'}$$

Співвідношення (15) за формою збігається з варіацією нескінченно малих деформацій оболонки відносно ненапруженого стану

$$\int_{V_{FE}} C^{ijkp} \varepsilon_{kp}^l \delta \varepsilon_{ij}^l dv = \int_{V_{FE}} C^{ijkp} C_p^{n'} C_j^{m'} \frac{\partial u^{n'}}{\partial x^k} \delta \frac{\partial u^{m'}}{\partial x^i} dv. \tag{16}$$

Таким чином, співвідношення МСЕ для попередньо напруженого (15) та ненапруженого (16) станів збігаються за виглядом, якщо при визначенні віртуальної роботи внутрішніх сил від приросту повних деформацій $\delta \bar{W}_{FE}$ коригувати компоненти тензора пружних сталей за формулою (15'). Цей факт дозволяє на основі лінійних рівнянь істотно спростити процедуру отримання відповідних співвідношень МСЕ, у яких урахується переднапружений стан оболонки.

Процедура інтегрування (15) звичайна для МСЕ. Застосувавши МССЕ, представивши функції напружень у вигляді відповідних до ε_{ij} рядів і

виконавши інтегрування аналітично, всі визначальні співвідношення для СЕ отримуються в явному вигляді. Здобуті залежності є універсальними: за ними на всіх ділянках оболонки ступінчасто-змінної товщини обчислюються коефіцієнти необхідних матриць СЕ. За невідомі функції прийняті узагальнені вузлові переміщення, які є сукупністю переміщень вузлів на серединній поверхні та різниці переміщень вузлів на обмежуючих поверхнях обшивки оболонки. При отриманні коефіцієнтів системи розв'язувальних рівнянь використовується методика, яка враховує ексцентричне розміщення СЕ відносно серединної поверхні оболонки на ділянках ступінчасто-змінної товщини.

Алгоритм щодо визначення спектру нижчих частот і векторів власних коливань оболонок неоднорідної структури реалізується методом ітерації підпросторів [15].

У задачах про власні коливання враховується наявність попереднього напруження конструкції від різноманітних статичних навантажень, що істотно впливає на спектр власних коливань і дає можливість визначити точки біфуркації та значення критичної сили при втраті стійкості за динамічним критерієм.

4. Стійкість і коливання квадратної у плані сферичної панелі при дії тиску. Розглядається квадратна в плані гладка сферична панель сталі товщини, що шарнірно оперта вздовж контуру та навантажується рівномірним тиском інтенсивністю q (рис. 2). Матеріал оболонки – ізотропний. Кривизна панелі визначається параметром $K = 2a^2/(Rh)$, де a – розмір всієї панелі у плані, R – радіус серединної поверхні, h – товщина. Прийнято такі вихідні данні: модуль пружності

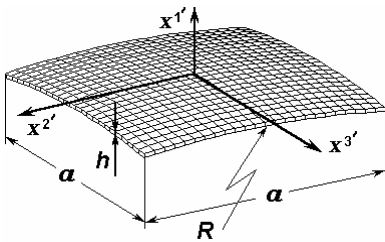


Рис. 2. Полога сферична панель сталі товщини

$E = 2.1 \cdot 10^6 \text{ кг/см}^2$, коефіцієнт Пуассона $\nu = 0.3$, $h = 1 \text{ см}$, $a = 60h$, $R = 225h$, об'ємна вага $\rho = 7.85 \cdot 10^{-3} \text{ кг/см}^3$, прискорення вільного падіння $g = 981 \text{ см/с}^2$.

Результати досліджень подані з використанням безрозмірних параметрів

$$\bar{q} = a^4 q / (Eh^4),$$

$$\bar{u}^1 = u^1 / h, \text{ де } u^1 \text{ – прогин панелі}$$

вздовж осі x^1 . Розглядалися панелі ідеальної та неідеальної (збуреної) вихідної форм.

За розрахункову скінченноелементну модель було прийнято дві схеми: ціла панель з рівномірною сіткою 16×16 СЕ і чверть панелі з сіткою

8 × 8 СЕ. Як довели дослідження, прийняті сітки забезпечують збіжність розв'язків.

Докладне дослідження нелінійного деформування та стійкості панелі за статичним критерієм, коли розв'язок задачі подається у вигляді діаграм “навантаження–прогин” наведено в [1,2]. У [22,23] для цієї панелі виконано порівняння з розрахунками, проведеними за допомогою програмних комплексів ЛІРА та SCAD, де отримано повний збіг розв'язків.

4.1. Спочатку вивчалось питання про врахування в незбуреній СЕМО існуючих площин симетрії. Це пов'язано з тим, що використання площин симетрії вилучає можливі появи несиметричних форм деформування та коливання, особливих точок і гілок нелінійних розв'язків. Розглянуто два варіанти СЕМО: 1-й – ціла панель без площин симетрії, 2-й – чверть панелі з двома площинами симетрії. Результати досліджень показано на рис. 3 - 4 і наведено в табл. 1 - 2. Навантаження № 0 відповідає вихідному стану, коли панель не навантажена. На діаграмі “ $\bar{q} - \bar{u}$ ” кружечками відмічено навантаження, при яких виконувався розрахунок на власні коливання (рис. 3).

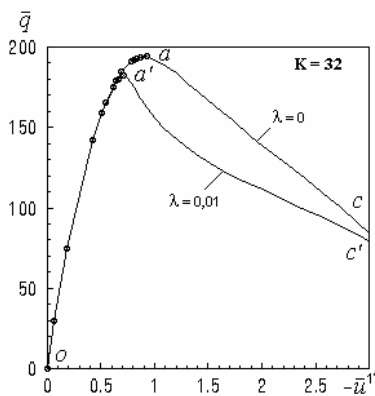


Рис. 3 Діаграми “навантаження–прогин”

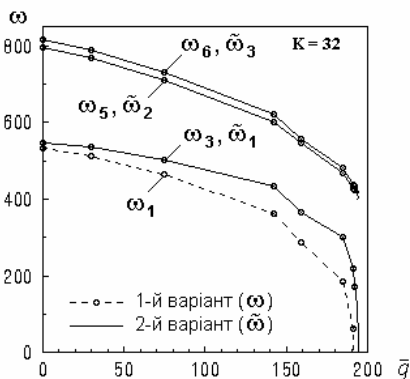


Рис. 4. Частоти власних коливань для СЕМО цілої (ω) та чверті ($\tilde{\omega}$) панелі

У 1-му варіанті визначено, що втрата стійкості відбувається при навантаженні № 7 ($\omega = \omega_1$ є від'ємним, табл. 1). Згідно з динамічним критерієм значення навантаження $\bar{q} = 191.6$, яке відповідає частоті

$\omega = \omega_1$, приймається за критичне $\bar{q}_{кр}^e$. Для цього варіанта СЕМО отримано кратні частоти $\omega_1 = \omega_2$ (табл. 1).

У 2-му варіанті отримано, що втрата стійкості відбувається при навантаженні № 11 ($\tilde{\omega} = \tilde{\omega}_1$ має від'ємне значення, табл. 1). Відповідне навантаження $\bar{q}_{кр}^e = 194.1$ на 1.3% більше, ніж у 1-му варіанті.

Таблиця 1

Порівняння нижчих частот власних коливань для двох варіантів розрахункових СЕМО при різних рівнях навантаження: 1-й варіант – ω , 2-й варіант – $\tilde{\omega}$







№ \bar{q}	ω_1	ω_2	$\omega_3 / \tilde{\omega}_1$	ω_4	$\omega_5 / \tilde{\omega}_2$	$\omega_6 / \tilde{\omega}_3$
0	.53378e+3	.53378e+3	.54740e+3 .54740e+3	.69124e+3	.79609e+3 .79609e+3	.81664e+3 .81664e+3
1	.51165e+3	.51165e+3	.53649e+3 .53649e+3	.66655e+3	.76658e+3 .76658e+3	.78817e+3 .78817e+3
2	.46283e+3	.46283e+3	.50307e+3 .50307e+3	.61388e+3	.71076e+3 .71076e+3	.73122e+3 .50307e+3
3	.36146e+3	.36146e+3	.43510e+3 .43510e+3	.50919e+3	.60013e+3 .60013e+3	.62064e+3 .62064e+3
4	.28587e+3	.28587e+3	.36695e+3 .36695e+3	.44483e+3	.54589e+3 .54589e+3	.55704e+3 .55704e+3
5	.18497e+3	.18497e+3	.30210e+3 .30210e+3	.36883e+3	.46713e+3 .46713e+3	.48017e+3 .48017e+3
6	.61401e+2	.61401e+2	.21912e+3 .21912e+3	.33078e+3	.42794e+3 .42794e+3	.43779e+3 .43779e+3
7	-.28992e+5	-.28992e+5	.17155e+3 .17155e+3	.33099e+3	.42306e+3 .42306e+3	.43369e+3 .43369e+3
8			.15189e+3		.41757e+3	.42908e+3
9			.11824e+3		.41026e+3	.42304e+3
10			.37174e+2		.40263e+3	.41733e+3
11			-.93272e+5		.39843e+3	.41587e+3

Для обох варіантів розрахункової моделі в табл. 2 наведено результати порівняння частот і форм власних коливань панелі для вихідного (ненавантаженого, № 0) стану. Видно, що розрахункова модель з площинами симетрії (2-й варіант) виключає кососиметричні форми коливань. Частоти, що відповідають симетричним формам, для обох

варіантів повністю збігаються. Характер коливань панелі для інших рівнів навантаження не змінюється (рис. 4, табл. 1).

Таблиця 2

Нижчі частоти та відповідні форм власних коливань для двох розрахункових СЕМО при відсутності навантаження (№ 0)

Ціла панель (1-й варіант)						
$\omega = 1 \div 6$.53378e+3	.53378e+3	.54740e+3	.69124e+3	.79609e+3	.81664e+3
Форма коливань						
Чверть панелі з двома площинами симетрії (2-й варіант)						
$\tilde{\omega} = 1 \div 3$.54740e+3		.79609e+3	.81664e+3

Дослідження врахування переднапруженого стану панелі показало, що неврахування накопиченого напруження (враховувався лише новий деформований стан оболонки) приводить до збільшення жорсткості панелі та невірного визначення $\bar{q}_{кр}^e$ та частот (рис. 5).

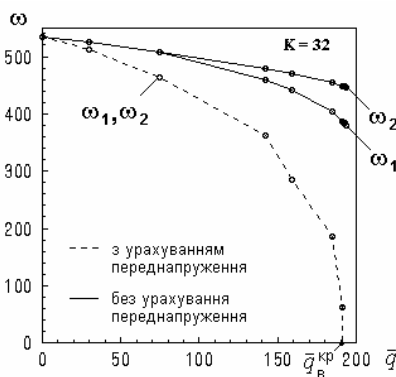


Рис. 5. Врахування та неврахування переднапруженого стану

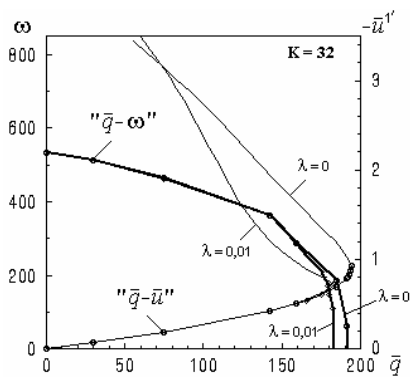


Рис. 6. Вплив початкової недосконалості форми оболонки на втрату стійкості та частоту основного тону панелі

4.2. Досліджувався вплив на частоти та форми власних коливань панелі несиметричного збурення у вигляді початкових недосконалостей

$\lambda \sin(2\pi\xi)$ внесених у вихідну форму серединної поверхні оболонки [1, 2]. На підставі проведеного вище дослідження подальший аналіз впливу початкових несиметричних недосконалостей на стійкість і власні коливання панелі слід виконувати по 1-му варіанту СЕМО.

За величину параметра збурення прийнято $\lambda=0.01$ (табл. 3). Одержана діаграма “ $\bar{q}-\bar{u}$ ” має вигляд нової кривої “ $oa'c'$ ” на відміну від кривої “ oac ”, що відповідає $\lambda=0$ (рис. 3, рис. 6). Відповідна величина верхнього критичного навантаження ($\bar{q}_{кр}^6=182.1$) відрізняється від отриманого при $\lambda=0$ (табл. 1) на -5%. Зниження величини критичного навантаження впливає на розходження діаграм “навантаження – частота” (“ $\bar{q}-\omega$ ”) при підході до $\bar{q}_{кр}^6$ (рис. 6).

Через внесення малого збурення у вихідну форму СЕМО нижчі частоти власних коливань, які для випадку $\lambda=0$ були отримані кратними ($\omega_1=\omega_2$, табл. 1), при $\lambda=0.01$ вже не є кратними, при цьому вони різняться між собою на малу величину ($\bar{\omega}_1 \neq \bar{\omega}_2$, табл. 3).

Таблиця 3

Частоти власних коливань панелі з початковою недосконалістю форми ($\lambda=0.01$) при різних рівнях навантаження (16×16 СЕ)

№ \bar{q}	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4	ω_5	ω_6
0	.53320e+3	.53375e+3	.54798e+3	.69128e+3	.79610e+3	.81664e+3
1	.51131e+3	.51161e+3	.53683e+3	.66660e+3	.76659e+3	.78817e+3
2	.46252e+3	.46276e+3	.50336e+3	.61395e+3	.71077e+3	.73122e+3
3	.36102e+3	.36113e+3	.43538e+3	.50935e+3	.60008e+3	.62059e+3
4	.28420e+3	.28471e+3	.36789e+3	.44540e+3	.54570e+3	.55687e+3
5	.25080e+3	.25196e+3	.34094e+3	.42289e+3	.52429e+3	.53336e+3
6	.21031e+3	.21152e+3	.31673e+3	.39602e+3	.49491e+3	.50440e+3
7	.17224e+3	.17626e+3	.29408e+3	.38299e+3	.47893e+3	.48787e+3
8	.14794e+3	.15620e+3	.28459e+3	.37973e+3	.47228e+3	.48144e+3
9	.10878e+3	.11897e+3	.27448e+3	.37371e+3	.45824e+3	.47095e+3
10	-.19149e+5	.50649e+2	.27119e+3	.38402e+3	.45173e+3	.47008e+3

Висновки

1. Розроблено комплексний підхід до розв'язування статичних задач геометрично нелінійного деформування та втрати стійкості пружних оболонок у поєднанні з методикою розрахунку тонких і середньої товщини оболонок на власні коливання з урахуванням переднапруженого стану на кожному кроці навантаження.

2. Розроблений метод застосовано до розрахунку тонкої оболонки сталюї товщини на стійкість з визначенням частот і форм власних коливань.

3. Дослідження коливань оболонки необхідно виконувати з урахуванням нового деформованого стану та передісторії її напруження.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Баженов В.А., Кривенко О.П., Соловей М.О.* Нелинейные деформирования та стійкість пружних оболонк неоднорідної структури. – К.: ЗАТ «Віпол», 2010. – 316 с.
2. *Баженов В.А., Кривенко О.П., Соловей Н.А.* Нелинейное деформирование и устойчивость упругих оболочек неоднородной структуры: Модели, методы, алгоритмы, малоизученные и новые задачи. – М.: Книжный дом «ЛИБРИКОМ», 2013. – 336 с.
3. *Голованов А.И., Тюленева О.Н., Шигабутинов А.Ф.* Метод конечных элементов в статике и динамике тонкостенных конструкций. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2006. – 392 с.
4. *Карпов В.В.* Прочность и устойчивость подкрепленных оболочек вращения. В 2-х ч. Ч.1. Модели и алгоритмы исследования прочности и устойчивости подкрепленных оболочек вращения. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2010. – 288 с.; Ч.2. Вычислительный эксперимент при статическом механическом воздействии. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2011. – 248 с.
5. *Николаев А.П., Клочков Ю.В., Киселев А.П., Гуреева Н.А.* Векторная интерполяция полей перемещений в конечно-элементных расчетах оболочек: монография – Волгоград: ФГБОУ ВПО Волгоградский ГАУ, 2012. – 264 с.
6. *Якушев В.Л.* Нелинейные деформации и устойчивость тонких оболочек. – М.: Наука, 2004. – 276 с.
7. *Reddy J.N.* Theory and Analysis of Elastic Plates and Shells, Second Edition - CRC Press, 2006. – 568 p.
8. *Chapelle D., Bathe K.J.* The finite element analysis of shells – Fundamentals. Series: Computational fluid and solid mechanics. – Berlin; Heidelberg: Springer, 2011. – 410 p.
9. *Zarutskii V.A., Lugovoi P.Z., Meish V.F.* Dynamic problems for and stress-strain state of inhomogeneous shell structures under stationary and nonstationary loads // International Applied Mechanics, 2009. – Vol. 45, № 3. – Pp. 245-271.
10. *Gavrilenko G.D., Matsner V.I., Kutenkova O.A.* Dent and thickness effects on the critical loads of stiffened shells // Strength of Materials, 2011. – Vol. 43, No. 3. – Pp. 347-351.
11. *Легостаев А.Д., Гречух Н.А.* Побудова співвідношень МСЕ для просторового попередньо напруженого скінченного елемента // Опір матеріалів і теорія споруд: наук.-тех. збірн. – К.: КНУБА, 2009. – Вип. 84. – С. 65-76.
12. *Жутов В.М.* Математическое и компьютерное моделирование нелинейных свободных колебаний упругих пологих оболочек ступенчато-переменной толщины // Инженерно-строительный журнал, 2010. – №4. – С. 38-48.
13. *Кислюкий В.Н., Сахаров А.С., Соловей Н.А., Легостаев А.Д.* Об одном варианте метода конечных элементов в задачах статики и динамики консольных оболочек // Сопротивление материалов и теория сооружений. – Киев: Будівельник, 1974. – Вип. 27. – С. 45-52.
14. Метод конечных элементов в механике твердых тел / *А.С.Сахаров, В.Н.Кислюкий, В.В.Киричевский и др.* – К.: Вища шк. Голов. изд-во, 1982. – 480 с.
15. Нелинейные задачи механики многослойных оболочек / *Баженов В.А., Сахаров А.С., Гондляр А.В., Мельников С.Л.* – К.: НИИ строительной механики, 1994. – 264 с.

16. *Баженов В.А., Кривенко О.П., Соловей М.О.* Матриця мас модифікованого просторового скінченного елемента неоднорідної оболонки // Опір матеріалів і теорія споруд: наук.-тех. збірн. – К.: КНУБА, 2013. – Вип. 91. – С. 114-125.
17. *Коробейников С.Н.* Нелинейное деформирование твердых тел. – Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2000. – 262 с.
18. *Вольмир А.С.* Нелинейная динамика пластинок и оболочек. – М.: Наука, 1972. – С. 432.
19. *Соловей М.О., Кривенко О.П., Калашиников О.Б., Тамілко О.А.* Порівняльний аналіз стійкості осесиметричних оболонок лінійно-змінної товщини // Опір матеріалів і теорія споруд: наук.-тех. збірн. – К.: КНУБА, 2009. – Вип. 84. – С. 89-95.
20. *Соловей М.О., Кривенко О.П., Мищенко О.О.* Порівняльний аналіз нелінійного деформування та стійкості гранованих оболонок ступінчасто-змінної товщини // Опір матеріалів і теорія споруд: наук.-тех. збірн. – К.: КНУБА, 2010. – Вип. 86. – С. 131-139.
21. *Bazhenov V.A., Solovei N.A., Krivenko O.P.* Modeling of Nonlinear Deformation and Buckling of Elastic Inhomogeneous Shells // Опір матеріалів і теорія споруд: наук.-тех. збірн. – К.: КНУБА, 2013. – Вип. 92. – С. 121-147.
22. *Баженов В.А., Соловей Н.А., Кривенко О.П., Мищенко О.А.* Моделирование процессов нелинейного деформирования и потери устойчивости упругих неоднородных оболочек // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений, 2014. – № 5. – С. 14–33.
23. *Баженов В.А., Кривенко О.П.* Конечноэлементное моделирование процессов нелинейного деформирования и потери устойчивости упругих неоднородных тонкостенных конструкций при действии термосиловых нагрузок // Труды Междун. молодежной научной конференции «Прочность, ползучесть и разрушение строительных и машиностроительных материалов и конструкций» (Мастер-классы известных специалистов), Москва, 18-21 ноября 2014 г. – С. 55-64.
24. *Соловей Н.А., Кривенко О.П., Малыгина О.А.* Конечноэлементные модели исследования нелинейного деформирования оболочек ступенчато-переменной толщины с отверстиями, каналами и выемками // Инженерно-строительный журнал, 2015. – № 1. – С. 56-69.

REFERENCES

1. *Bazhenov V.A., Krivenko O.P., Solovei M.O.* Nelineine deformuvannya ta stiikest pruzhnykh obolonok neodnorodnoi struktury. – К.: ZAT «Vipol», 2010. – 316 s.
2. *Bazhenov V.A., Krivenko O.P., Solovei N.A.* Nelineynoe deformirovanie i ustoychivost uprugih obolochek neodnorodnoy struktury: Modeli, metodyi, algoritmyi, maloizuchennyie i novyie zadachi. – М.: Knizhnyiy dom «LIBRIKOM», 2013. – 336 s.
3. *Golovanov A.I., Tyuleneva O.N., Shigabutdinov A.F.* Metod konechnykh elementov v statike i dinamike tonkostennykh konstruksiy. – М.: FIZMATLIT, 2006. - 392 s.
4. *Karpov V.V.* Prochnost i ustoychivost podkreplennykh obolochek vrascheniya. V 2-h. ch. Ch.1. Modeli i algoritmyi issledovaniya prochnosti i ustoychivosti podkreplennykh obolochek vrascheniya. – М.: FIZMATLIT, 2010. – 288 s.; Ch.2. Vyichislitelnyiy eksperiment pri staticheskom mehanicheskom vozdeystvii. – М.: FIZMATLIT, 2011. – 248 s.
5. *Nikolaev A.P., Klochkov Yu.V., Kiselev A.P., Gureeva N.A.* Vektornaya interpolatsiya poley peremescheniy v konechno-elementnykh raschetah obolochek: monografiya – Volgograd: FGBOU VPO Volgogradskiy GAU, 2012. – 264 s.
6. *Yakushev V.L.* Nelineynye deformatsii i ustoychivost tonkiy obolochek. – М.: Nauka, 2004. – 276 s.
7. *Reddy J.N.* Theory and Analysis of Elastic Plates and Shells, Second Edition - CRC Press, 2006. – 568 p.
8. *Chapelle D., Bathe K.J.* The finite element analysis of shells – Fundamentals. Series: Computational fluid and solid mechanics. – Berlin; Heidelberg: Springer, 2011. – 410 p.

9. *Zarutskii V.A., Lugovoi P.Z., Meish V.F.* Dynamic problems for and stress-strain state of inhomogeneous shell structures under stationary and nonstationary loads // *International Applied Mechanics*, 2009. – Vol. 45, № 3. – Pp. 245-271.
10. *Gavrilenko G.D., Matsner V.I., Kutenkova O.A.* Dent and thickness effects on the critical loads of stiffened shells // *Strength of Materials*, 2011. – Vol. 43, No. 3. – Pp. 347-351.
11. *Lehostaiev A.D., Hrechukh N.A.* Pobudova spivvidnoshen MSE dlia prostorovoho poperedno napruzhenoho skinchennoho elementa // *Opir materialiv i teoriia sporud: nauk.-tekh. zbirn.* – K.: KNUBA, 2009. – Vyp. 84. – S. 65-76.
12. *Zhgutov V.M.* Matematicheskoe i kompyuternoe modelirovanie nelineynykh svobodnykh kolebaniy uprugih pologih obolochek stupenchato-peremennoy tolschiny // *Inzhenerno-stroitelnyy zhurnal*, 2010. – №4. – S. 38-48.
13. *Kislookiy V.N., Saharov A.S., Solovey N.A., Legostaev A.D.* Ob odnom variante metoda konechnykh elementov v zadachah statiki i dinamiki konsolnykh obolochek // *Soprotivlenie materialov i teoriya sooruzheniy.* – Kiev: Budlvelnik, 1974. – Vyip. 27. – S. 45-52.
14. *Metod konechnykh elementov v mehanike tverdykh tel / A.S.Saharov, V.N.Kislookiy, V.V.Kirichevskiy i dr.* – K.: Vischa shk. Golov. izd-vo, 1982. – 480 s.
15. *Nelineynnye zadachi mehaniki mnogoslownykh obolochek / Bazhenov V.A., Saharov A.S., Gondlyah A.V., Melnikov S.L.* – K.: NII stroitelnoy mehaniki, 1994. – 264 s.
16. *Bazhenov V.A., Kryvenko O.P., Solovei M.O.* Matrytsia mas modyfikovanoho prostorovoho skinchennoho elementa neodnorodnoy obolonky // *Opir materialiv i teoriia sporud: nauk.-tekh. zbirn.* – K.: KNUBA, 2013. – Vyp. 91. – C. 114-125.
17. *Korobeynikov S.N.* Nelineynnoe deformirovanie tverdykh tel. – Novosibirsk: Izd-vo SO RAN, 2000. – 262 s.
18. *Volmir A.S.* Nelineynnaya dinamika plastinok i obolochek. – M.: Nauka, 1972. – S. 432.
19. *Solovei M.O., Kryvenko O.P., Kalashnikov O.B., Tamilko O.A.* Porivnialnyi analiz stiiakosti osesymetrychnykh obolonok liniino-zminnoi tovshchyny // *Opir materialiv i teoriia sporud: nauk.-tekh. zbirn.* – K.: KNUBA, 2009. – Vyp. 84. – S. 89-95.
20. *Solovei M.O., Kryvenko O.P., Mishchenko O.O.* Porivnialnyi analiz neliniinoho deformuvannia ta stiiakosti hranovanykh obolonok stupinchasto-zminnoi tovshchyny // *Opir materialiv i teoriia sporud: nauk.-tekh. zbirn.* – K.: KNUBA, 2010. – Vyp. 86. – C. 131-139.
21. *Bazhenov V.A., Solovei N.A., Krivenko O.P.* Modeling of Nonlinear Deformation and Buckling of Elastic Inhomogeneous Shells // *Opir materialiv i teoriia sporud: nauk.-tex. zbirn.* – K.: KHUBA, 2013. – Vip. 92. – C. 121-147.
22. *Bazhenov V.A., Solovey N.A., Krivenko O.P., Mischenko O.A.* Modelirovanie protsessov nelineynogo deformirovaniya i poteri ustoychivosti uprugih neodnorodnykh obolochek // *Stroitel'naya mehanika inzhenernykh konstruksiy i sooruzheniy*, 2014. – № 5. – S. 14–33.
23. *Bazhenov V.A., Krivenko O.P.* Konechnoelementnoe modelirovanie protsessov nelineynogo deformirovaniya i poteri ustoychivosti uprugih neodnorodnykh tonkostennykh konstruksiy pri deystvii termosilovykh zagruzok // *Trudy Mezhdun. molodezhnoy nauchnoy konferentsii «Prochnost, polzuchest i razrushenie stroitelnykh i mashinostroitelnykh materialov i konstruksiy» (Master-klassy izvestnykh spetsialistov)*, Moskva, 18-21 noyabrya 2014 g. – S. 55-64.
24. *Solovey N.A., Krivenko O.P., Malyigina O.A.* Konechnoelementnyie modeli issledovaniya nelineynogo deformirovaniya obolochek stupenchato-peremennoy tolschiny s otverstiyami, kanalami i vyiemkami // *Inzhenerno-stroitelnyy zhurnal*, 2015. – № 1. – S. 56-69.

Bazhenov V.A., Krivenko O.P., Legostaev A.D.

STABILITY AND NATURAL VIBRATIONS OF INHOMOGENEOUS SHELLS TAKING INTO ACCOUNT THE STRESS STATE

The work is devoted to the problem of developing a unified methodology based on the efficient numerical analysis of problems of stability and natural vibrations of a wide class of inhomogeneous shells, thin and medium thickness. In problems of its natural vibrations takes into account the presence of a pre-stressed state of the structure from the action of static loads, which significantly affect the spectrum of natural vibrations and allows determining the bifurcation point and the value of the critical force of buckling by dynamic criteria.

Keywords: thin elastic shell, geometrically nonlinear deformation, natural vibrations, universal solid finite element.

Баженов В.А., Кривенко О.П., Легостаев А.Д.

УСТОЙЧИВОСТЬ И СОБСТВЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ НЕОДНОРОДНЫХ ОБОЛОЧЕК С УЧЕТОМ НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ

Работа посвящена проблеме разработки единой методологии на основе эффективного численного анализа задач устойчивости и собственных колебаний широкого класса неоднородных оболочек, как тонких, так и средней толщины. В задачах о собственных колебаниях учитывается наличие преднапряженного состояния конструкции от действия статических нагрузок, что существенно влияет на спектр собственных колебаний и позволяет определять точки бифуркации и значение критической силы при потере устойчивости по динамическому критерию.

Ключевые слова: тонкая упругая оболочка, геометрически нелинейное деформирование, собственные колебания, универсальный пространственный конечный элемент.

Автор (вчена ступень, вчене звання, посада): доктор технічних наук, професор, академік Національної академії педагогічних наук України, зав. кафедрою будівельної механіки КНУБА, директор НДІ будівельної механіки КНУБА **БАЖЕНОВ Віктор Андрійович**
Адреса робоча: 03680 Україна, м. Київ, Повітрофлотський проспект 31, Київський національний університет будівництва і архітектури, **БАЖЕНОВУ Віктору Андрійовичу**
Адреса домашня: 01001 м. Київ, вул. Заньковецької, б. 5/2, кв. 31. **БАЖЕНОВУ Віктору Андрійовичу**.
Роб. тел. +38(044) 245-48-29.

Автор (вчена ступень, вчене звання, посада): кандидат технічних наук, старший науковий співробітник, провідний науковий співробітник НДІ будівельної механіки КНУБА **КРИВЕНКО Ольга Петрівна**
Адреса робоча: 03680 Україна, м. Київ, Повітрофлотський проспект 31, Київський національний університет будівництва і архітектури, **КРИВЕНКО Ользі Петрівні**.
Адреса домашня: 03035, Україна, м. Київ, вул. Кудряшова 7-б, кв. 145, **КРИВЕНКО Ользі Петрівні**
Роб. тел. +38(044) 245-48-29;
мобільний тел.: +38(066) 048-32-77.
E-mail – olakor@ukr.net

Автор (вчена ступень, вчене звання, посада): кандидат технічних наук, доцент, доцент кафедри будівельної механіки КНУБА, **ЛЕГОСТАСВ Анатолій Дмитрович**
Адреса робоча: 03680 Україна, м. Київ, Повітрофлотський проспект 31, Київський національний університет будівництва і архітектури, **ЛЕГОСТАСВУ Анатолію Дмитровичу**
Роб. тел. +38(044) 241-54-66.