

УДК 539.3

АЛГОРИТМ РОЗВ'ЯЗАННЯ ВІСЕСИМЕТРИЧНИХ ЗАДАЧ НЕСТАЦІОНАРНОЇ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ

В.П. Андрієвський¹

канд. техн. наук., асистент кафедри будівельної механіки

О.І. Гуляр¹

д-р техн. наук., професор

Ю.В. Максим'юк¹

канд. техн. наук., доцент кафедри будівельної механіки

С.В. Мицюк¹

канд. техн. наук

¹ *Київський національний університет будівництва і архітектури, Київ*

Наведені основні розрахункові співвідношення вісесиметричних задач нестационарної теплопровідності в криволінійній системі координат. Проведені чисельні дослідження для обґрунтування достовірності результатів.

Ключові слова: метод скінчених елементів (МСЕ), скінчений елемент (СЕ), нестационарна теплопровідність, вісесиметричні тіла, криволінійна система координат.

Вступ. Експлуатація значної кількості відповідальних конструкцій, таких як ротори парових турбін і газотурбінних установок, здійснюється в умовах складних теплових режимів, які мають визначальний вплив при оцінці їх напружено-деформованого стану, що особливо виражається на етапах пуску або зупинки. В цих випадках визначення нерівномірних температурних полів потребує розв'язку нестационарної вісесиметричної задачі теплопровідності.

1. Розрахункові співвідношення нестационарної теплопровідності вісесиметричних задач. Температурне поле неоднорідного ізотропного тіла обертання, об'ємом V , обмеженого поверхнею S описується рівнянням нестационарної теплопровідності [5]:

$$\operatorname{div}(\lambda_T \nabla T) + q_0 = C_V \frac{\partial T}{\partial t}; \quad (1)$$

де λ_T - коефіцієнт теплопровідності; T - температура в точці тіла, що розглядається; q_0 - щільність виділення тепла внутрішніми джерелами за одиницю часу; C_V - питома об'ємна теплоємність матеріалу.

В криволінійній системі координат x^α [1] покомпонентна форма диференційного рівняння (1) приймає вигляд [2]:

$$\frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \left(\lambda_T(T) g^{\alpha\beta} \sqrt{g} \frac{\partial T}{\partial x^\beta} \right) + q_0 = C_V(T) \frac{\partial T}{\partial t}. \quad (2)$$

Однозначність розв'язання рівняння (2) забезпечується введенням відповідних початкових та граничних умов. В якості початкових умов приймається відоме розподілення температури в тілі в деякий фіксований момент часу t_0 , що приймається за початок часової координати.

$$T(x^\alpha, t_0) = T_0(x^\alpha), \quad x^\alpha \in V, \quad (3)$$

де $T_0(x^\alpha)$ - задана функція координат.

Граничні умови в теорії теплопровідності формуються в вигляді трьох ідеалізованих типів теплопередачі на границі тіла:

1. відомі зміни з часом температури точок поверхні тіла

$$T(x^\alpha, t) = f(x^\alpha, t), \quad x^\alpha \in S_1, \quad (4)$$

де $f(x^\alpha, t)$ - задана функція; S_1 - частина поверхні тіла S , на якій задані граничні умови першого роду.

2. відома щільність теплового потоку з поверхні тіла в зовнішнє середовища

$$q(x^\alpha, t) = -\lambda_T(T) \frac{\partial T(x^\alpha, t)}{\partial n}, \quad x^\alpha \in S_2, \quad (5)$$

де n - зовнішня нормаль до поверхні тіла в точці x^α ; S_2 - частина поверхні тіла S , на якій задані граничні умови другого роду.

3. відома температура зовнішнього середовища θ і закон конвекційного теплообміну між поверхнею тіла і зовнішнім середовищем

$$-\lambda_T(T) \frac{\partial T(x^\alpha, t)}{\partial n} = \alpha(T) [T(x^\alpha, t) - \theta(x^\alpha, t)], \quad x^\alpha \in S_3, \quad (6)$$

де $\alpha(T)$ - коефіцієнт тепловіддачі; S_3 - частина поверхні тіла S , на якій задані граничні умови третього роду.

Рівняння (2) з початковими (3) і граничними (4)-(6) умовами однозначно визначає нестаціонарне температурне поле в тілі, властивості якого в загальному випадку залежать від просторових координат і температури.

Диференціальне рівняння (2) з граничними умовами (4)-(6) еквівалентне варіаційному рівнянню вісесиметричної задачі нестаціонарної теплопровідності [4]:

$$\delta\chi = \int_V \left(\lambda_T \frac{\partial T}{\partial x^\alpha} \frac{\partial \delta T}{\partial x^\beta} g^{\alpha\beta} + q_0 \delta T \right) \sqrt{g} dV + \int_S \alpha(T - \theta) \delta T dS -$$

$$-\int_V C_V \frac{\partial T}{\partial t} \delta T \sqrt{g} dV = 0 \dots\dots \dots \quad \dots (7)$$

Тут і в подальшому всі індекси, позначені грецькими буквами, будуть приймати значення 1,2, а позначені латинськими – 1,2,3.

В межах СЕ передбачається, що коефіцієнт теплопровідності λ_T , питома об'ємна теплоємність C_V та значення компонент метричного тензору g^{ij} несуттєво змінюється в площини СЕ і приймаються рівними їх відповідним значенням в центрі:

$$\lambda_T = \overset{\circ}{\lambda}_T = \lambda_T|_{x^\alpha=0}, \quad C_V = \overset{\circ}{C}_V = C_V|_{x^\alpha=0}, \quad g^{ij} = \overset{\circ}{g}^{ij} = g^{ij}|_{x^\alpha=0}. \quad (8)$$

В якості невідомих при розв'язанні задачі стаціонарної теплопровідності приймається значення температури в вузлах елемента $T_{(S_1, S_2)}$.

Розподілення температури у межах СЕ описується білінійним законом:

$$T = \sum_{S_1=\pm 1} \sum_{S_2=\pm 1} T_{(S_1, S_2)} \left(\frac{1}{2} S_1 x^1 + \frac{1}{2} S_2 x^2 + S_1 S_2 x^1 x^2 + \frac{1}{4} \right), \quad (9)$$

де $T_{(S_1, S_2)}$ – вузлові значення температури.

Вирази для похідних від температури мають вигляд:

$$T_{, \alpha} = \sum_{S_1=\pm 1} \sum_{S_2=\pm 1} T_{(S_1, S_2)} \left(\frac{1}{2} + S_{(3-\alpha)} x^{(3-\alpha)} \right) S_\alpha. \quad (10)$$

Для системи з M скінченних елементів варіаційне рівняння (7) можна записати в наступному вигляді

$$\begin{aligned} \delta\chi = & \sum_{i=1}^M \sum_{S_1=\pm 1} \sum_{S_2=\pm 1} \sum_{P_1=\pm 1} \sum_{P_2=\pm 1} \sum_V \left[\int [\lambda_T(T_{(S_1, S_2)}) \frac{\frac{1}{2} S_1 x^1 + \frac{1}{2} S_2 x^2 + S_1 S_2 x^1 x^2 + \frac{1}{4}}{x^\alpha S_\alpha + \frac{1}{2}} \times \right. \\ & \times \delta T_{(P_1, P_2)} \frac{\frac{1}{2} P_1 x^1 + \frac{1}{2} P_2 x^2 + P_1 P_2 x^1 x^2 + \frac{1}{4}}{x^\beta P_\beta + \frac{1}{2}} g^{\alpha\beta} + \\ & \left. + q_{0(S_1, S_2)} \left(\frac{1}{2} S_1 x^1 + \frac{1}{2} S_2 x^2 + S_1 S_2 x^1 x^2 + \frac{1}{4} \right) * \right. \\ & \left. \times \delta T_{(P_1, P_2)} \left(\frac{1}{2} P_1 x^1 + \frac{1}{2} P_2 x^2 + P_1 P_2 x^1 x^2 + \frac{1}{4} \right) - \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -C_V \frac{dT_{(S_1, S_2)}}{dt} \left(\frac{1}{2} S_1 x^1 + \frac{1}{2} S_2 x^2 + S_1 S_2 x^1 x^2 + \frac{1}{4} \right) \times \\
& \times \delta T_{(P_1, P_2)} \left(\frac{1}{2} P_1 x^1 + \frac{1}{2} P_2 x^2 + P_1 P_2 x^1 x^2 + \frac{1}{4} \right)] dV + \int_{\Gamma_3} \alpha(T_{(S_1, S_2)} - \theta_{(S_1, S_2)}) \times \\
& \times \left(\frac{1}{2} S_1 x^1 + \frac{1}{2} S_2 x^2 + S_1 S_2 x^1 x^2 + \frac{1}{4} \right) \times \\
& \times \delta T_{(P_1, P_2)} \left(\frac{1}{2} P_1 x^1 + \frac{1}{2} P_2 x^2 + P_1 P_2 x^1 x^2 + \frac{1}{4} \right) d\Gamma_3]_i = 0. \quad (11)
\end{aligned}$$

Грунтуючись на введених гіпотезах про постійність теплофізичних і геометричних характеристик в межах поперечного перерізу СЕ, використовуючи раніше обчислені інтеграли (2.29), а також після обчислення наступних інтегралів по площі поперечного перерізу:

$$\begin{aligned}
& \int_{x^1 = -\frac{1}{2}}^{x^1 = \frac{1}{2}} \int_{x^2 = -\frac{1}{2}}^{x^2 = \frac{1}{2}} x^\alpha x^1 x^2 dx^1 dx^2 = 0; \quad \int_{x^1 = -\frac{1}{2}}^{x^1 = \frac{1}{2}} \int_{x^2 = -\frac{1}{2}}^{x^2 = \frac{1}{2}} (x^1)^2 (x^2)^2 dx^1 dx^2 = \frac{1}{144}, \\
& \int_{x^1 = -\frac{1}{2}}^{x^1 = \frac{1}{2}} \int_{x^2 = -\frac{1}{2}}^{x^2 = \frac{1}{2}} x^1 x^2 dx^1 dx^2 = 0; \quad \int_{x^1 = -\frac{1}{2}}^{x^1 = \frac{1}{2}} \int_{x^2 = -\frac{1}{2}}^{x^2 = \frac{1}{2}} x^1 x^2 dx^1 dx^2 = 0,
\end{aligned}$$

отримаємо:

$$\begin{aligned}
\delta \chi = & \sum_{i=1}^M \left[\sum_{S_1=\pm 1} \sum_{S_2=\pm 1} \sum_{P_1=\pm 1} \sum_{P_2=\pm 1} \sum_{x^3} \left[\int [a(T_{(S_1, S_2)}) \delta T_{(P_1, P_2)} (S_\alpha P_\beta g^{\alpha\beta} [(1 - \delta_\beta^\alpha) \times \right. \right. \\
& \times \delta T_{(P_1, P_2)} \frac{\frac{3}{4} S_1 P_1 + \frac{3}{4} S_2 P_2 + \frac{1}{3} S_1 S_2 P_1 P_2 + 2 \frac{1}{4}}{(S_\alpha P_\alpha + 3)(S_\beta P_\beta + 3)} + \\
& \left. \left. + \delta_\beta^\alpha \frac{\frac{1}{4} S_1 P_1 + \frac{1}{4} S_2 P_2 + \frac{1}{12} S_1 S_2 P_1 P_2 + \frac{3}{4}}{S_\alpha P_\alpha + 3} \right. \right. \\
& \left. \left. + q_{0(S_1, S_2)} \delta T_{(P_1, P_2)} \left(\frac{1}{48} S_1 P_1 + \frac{1}{48} S_2 P_2 + \frac{1}{144} S_1 S_2 P_1 P_2 + \frac{1}{16} \right) \right] - \right. \\
& \left. - \frac{dT_{(S_1, S_2)}}{dt} \delta T_{(P_1, P_2)} \left(\frac{1}{48} S_1 P_1 + \frac{1}{48} S_2 P_2 + \frac{1}{144} S_1 S_2 P_1 P_2 + \frac{1}{16} \right) \right] \sqrt[3]{g} dx^3 + \\
& + \int_{x^3} \frac{a}{C_V} \left[\sum_{S_1=\pm 1} \sum_{S_2=\pm 1} \sum_{P_1=\pm 1} (T_{(S_1, S_2)} - \theta_{(S_1, S_2)}) \delta T_{(P_1, P_2)} \frac{S_1 P_1 + 3}{12} \sqrt{g^{22}} + \right. \\
& \left. + \sum_{S_1=\pm 1} \sum_{S_2=\pm 1} \sum_{P_2=\pm 1} (T_{(S_1, S_2)} - \theta_{(S_1, S_2)}) \delta T_{(S_1, P_2)} \frac{S_2 P_2 + 3}{12} \sqrt{g^{11}} \right] \sqrt[3]{g} dx^3 \Big]_i = 0. \quad (12)
\end{aligned}$$

де a – коефіцієнт температуропровідності, $a = \frac{\lambda_T}{C_V}$.

Враховуючи довільність δT рівняння (8) еквівалентне системі звичайних диференціальних рівнянь з перемінними коефіцієнтами, яке в матричній формі набуває вигляду:

$$\sum_{i=1}^M \left[\sum_{S_1=\pm 1} \sum_{S_2=\pm 1} \sum_{P_1=\pm 1} \sum_{P_2=\pm 1} \left[-C_{(S_1, S_2, P_1, P_2)} \frac{\delta T_{(S_1, S_2)}}{dt} + \left[A_{(S_1, S_2, P_1, P_2)} + B_{(S_1, S_2, P_1, P_2)} \right] T_{(S_1, S_2)} \right]_i \right] = \sum_{i=1}^M \{Q_0\}_i ; \quad (13)$$

де

$$Q_0 = \sum_{S_1=\pm 1} \sum_{S_2=\pm 1} \sum_{P_1=\pm 1} \sum_{P_2=\pm 1} -q_{0(S_1, S_2)} \delta T_{(P_1, P_2)} \left(\frac{1}{48} S_1 P_1 + \frac{1}{48} S_2 P_2 + \frac{1}{144} S_1 S_2 P_1 P_2 + \frac{1}{16} \right) + B_{(S_1, S_2, P_1, P_2)} - \quad (14)$$

компоненти вектора правих частин, які характеризуються інтенсивністю зовнішньої теплової дії,

$$A_{(S_1, S_2, P_1, P_2)} = \left[a S_\alpha P_\beta g^{\alpha\beta} \left[(1 - \delta_\beta^\alpha) \frac{3}{4} S_1 P_1 + \frac{3}{4} S_2 P_2 + \frac{1}{3} S_1 S_2 P_1 P_2 + 2 \frac{1}{4} + \delta_\beta^\alpha \frac{1}{4} S_1 P_1 + \frac{1}{4} S_2 P_2 + \frac{1}{12} S_1 S_2 P_1 P_2 + \frac{3}{4} \right] \sqrt{g} + \frac{S_\alpha P_\alpha + 3}{S_\alpha P_\alpha + 3} \right] \sqrt{g} - \quad (15)$$

коефіцієнти матриці теплопровідності,

$$C_{(S_1, S_2, P_1, P_2)} = \left(\frac{1}{48} S_1 P_1 + \frac{1}{48} S_2 P_2 + \frac{1}{144} S_1 S_2 P_1 P_2 + \frac{1}{16} \right) \sqrt{g}, - \quad (16)$$

коефіцієнти матриці теплоємності,

$$B_{(S_1, S_2, P_1, P_2)} = \frac{a}{C_V} \frac{S_\alpha P_\alpha + 3}{12} \sqrt{g^{(3-\alpha)(3-\alpha)}} \sqrt{g}, -$$

додаткові члени коефіцієнтів матриці теплопровідності для скінченних елементів, що примикають до граничної поверхні, що співпадає з координатною лінією x^n .

Для розв'язання системи диференціальних рівнянь (13) приймається метод скінченних різниць. Вздовж часової координати t вибирається скінченна множина N точок t_n ($n = 0, 1, \dots, N$) з кроком Δt_n таким чином, щоб $t_n \big|_{n=0} = t_n$; $t_n \big|_{n=N} = t_\kappa$. Замінюючи похідну за часом в (13) скінченно-різничевим алгоритмом другого порядку точності за схемою

Кранка-Ніколсона [6] і приймаючи в якості невідомих значення температури в вузлах сіткової області в момент часу t_{n+1} , маємо систему алгебраїчних рівнянь відносно $T_{(S_1, S_2)}^{n+1}$

$$\sum_{S_1=\pm 1} \sum_{S_2=\pm 1} \sum_{P_1=\pm 1} \sum_{P_2=\pm 1} [C_{(S_1, S_2, P_1, P_2)} T_{(S_1, S_2)}^{n+1} + \frac{\Delta t_n}{2} [A_{(S_1, S_2, P_1, P_2)} + B_{(S_1, S_2, P_1, P_2)}] T_{(S_1, S_2)}^{n+1}] = \sum_{S_1=\pm 1} \sum_{S_2=\pm 1} \sum_{P_1=\pm 1} \sum_{P_2=\pm 1} [C_{(S_1, S_2, P_1, P_2)} T_{(S_1, S_2)}^n - \frac{\Delta t_n}{2} [A_{(S_1, S_2, P_1, P_2)} + B_{(S_1, S_2, P_1, P_2)}] T_{(S_1, S_2)}^n + \frac{\Delta t_n}{2} (Q_0^n + Q_0^{n+1})], \quad (17)$$

або в матричному вигляді

$$[C]\{T\}_{n+1} + [A]\{T\}_{n+1} = [C]\{T\}_n - [A]\{T\}_n + \{Q_0\}_n. \quad (18)$$

2. Збіжність і точність приближених рішень в вісесиметричних нестационарних задачах теплопровідності.

Розглянемо застосування розробленої методики по дослідженню температурних полів, що не встановились в конструкціях, які знаходяться в умовах конвекційного теплообміну з зовнішнім середовищем, температура якого змінюється з залежності від часу.

Довгий циліндр. Чисельні дослідження проведемо при розв'язанні задачі нестационарної теплопровідності для довгого циліндру при конвекційному теплообміні між його поверхнею і навколишнім середовищем, температура якого θ_2 змінюється в залежності від часу t за законом

$$\theta_2 = \theta_0 (1 + k_1 \cdot e^{k\tau}),$$

де $\tau = \frac{\alpha t}{r^2}$ - безрозмірний час, r - радіус циліндру, $\theta_0 = 823^\circ C$, $\alpha = 0.557 \cdot 10^{-5} \text{ м}^2/\text{с}$ - коефіцієнт теплопровідності, $k_1 = -0.5473$, $k = 53.6$.

Температура циліндра при $t_0 = 0$ прийнята $323^\circ C$, критерій теплової подібності $B_i = \frac{\alpha \cdot r}{\lambda} = 15$.

Для даної задачі досліджувалась узгодженість рішення, яке отримане по розробленій методиці, з аналітичним рішенням [5], а також з чисельним розв'язком отриманим на основі використання просторово-часових СЕ [3] в залежності від кількості СЕ по радіусу. Аналіз результатів показав, що при достатньо малій (5 СЕ) кількості елементів,

взятих по товщині циліндра, максимальна похибка не перевищує 3%, а десять елементів забезпечує точність x максимальною похибкою до 1%.

На рис. 1 в вигляді ізоліній показано розподілення температури в циліндрі для моментів часу $t = 180 \text{ с}$, 300 с , 420 с , 540 с . Суцільна лінія відповідає аналітичному розв'язку [5], штрихпунктирна – рішенню, яке отримане за МСЕ [3], а кружечками за розробленою методикою.

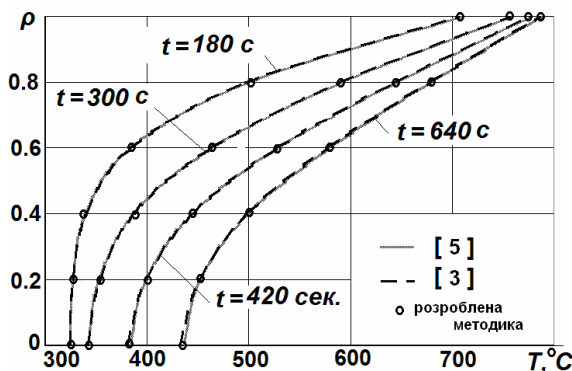


Рис. 1 Нестационарное температурное поле сплошного цилиндра

Співставлення кривих аналітичного і наближених розв'язків, дозволяє констатувати, що запропонована методика досить добре узгоджується з аналітичним і чисельним розв'язком інших авторів.

Необмежена пластина. Досліджуємо розподілення температури по товщині необмеженої сталеві пластины при конвекційному теплообміні між її поверхнею $z^{I'} = +h/2$ і навколишнім середовищем. Поверхня $z^{I'} = -h/2$ передбачається ідеально теплоізолюваною. Початкова температура пластины $T_0 = 293^\circ \text{ K}$, температура теплоносія $\theta = 1273^\circ \text{ K}$, коефіцієнт теплопровідності $\alpha = 0.66 \cdot 10^{-5} \text{ м}^2/\text{с}$. Критерій теплової подібності, що відповідає товщині пластины $h = 0.008 \text{ м}$, $B_i = \frac{\alpha \cdot R}{\lambda} = 0.2$.

На рис. 2 в вигляді ізоліній показано розподілення температури по товщині пластины для моментів часу $t = 5 \text{ с}$, 10 с , 15 с , 20 с , 30 с , 60 с . Як і в попередньому прикладі суцільна лінія відповідає аналітичному розв'язку [5], штрихпунктирна – рішенню, яке отримане за МСЕ [3], а кружечками за розробленою методикою.

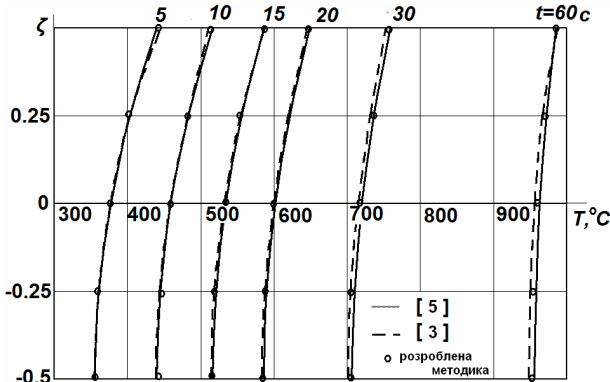


Рис. 2. Розподілення невстановленої температури в необмеженій пластині

Аналіз результатів показує, що в даному прикладі спостерігається добра збіжність наближених і аналітичного розв'язку.

Висновок. Наведені розв'язки контрольних прикладів свідчать про достовірність отримуваних на основі розробленої методики результатів і її ефективність, як по просторовій так і часовій координаті порівняно з методикою, що базується на використанні просторово-часових СЕ.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Андрієвський В.П., Максим'юк Ю.В. Методика розв'язання вісесиметричних задач стаціонарної теплопровідності та термопружності на основі МССЕ/ В. П. Андрієвський, Ю. В. Максим'юк // Опір матеріалів і теорія споруд. - 2014. - Вип. 93. - С. 64-72.
2. Блох В. И. Теория упругости / В. И. Блох. - Х. : Изд. Харьковск. Гос. Университета, 1964. - 484 с.
3. Гуляр А.И., Кислокий В.Н., Сахаров А.С., Чорный С.М. Решения трехмерной задачи теплопроводности в криволинейной системе координат методом конечных элементов. - В.сб.: «Сопrotивление материалов и теория сооружений». Вып. XXII. Киев, «Будівельник», 1974.
4. Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике. М., «Мир», 1975.
5. Коваленко А. Д. Основы термоупругости / А. Д. Коваленко. - К. : Наук. думка, 1970. - 204 с.
6. Шабров Н.Н. Метод конечных элементов в расчетах деталей тепловых двигателей. - Л.: Машиностроение, 1968. - 212 с.

REFERENCES

1. Andrievskiy V.P., Maksym'yuk Y. Methods of solving axisymmetrical problems of stationary heat conduction and thermoelasticity based MSSE / VP Andrievsky, V. // Maksym'yuk resistance of materials and structures theory. 2014 - Vol. 93 - P. 64 72.
2. Bloch V.I. Theory upruhosity VI / VI Bloch. - H., Ed. Of Kharkiv. Gos. University, 1964. - 484 P.
3. Gulyar A.I., Kysloooky V.N., Sakharov A.S., Chornyy S.M. Solutions teploprovodnosty a three-

- dimensional problem kryvolyneynoy coordinate system by Finite elementov.- V.sb .: "Resistance of materials and structures theory." Vup.XXII. Kiev, "builder", 1974.
4. *Zenkevich A.* finite elements method in technology. Moscow, "Mir", 1975.
 5. *Kovalenko A.D.* Fundamentals termoupruhosty / AD Kovalenko. - K.: Science. opinion, 1970. - 204 p.
 6. *Shabrov N.N.* The method of finite elements calculation details in thermal engines. - L .: Mashinostroenie, 1968. - 212 p.

Guliar A., Pyskunov S., Andriievskiy V., Maximjuk Yu.

ALGORITHM SOLVING PROBLEMS AXISYMMETRICAL NONSTATIONARY HEAT CONDUCTION

The basic estimated value axisymmetrical unsteady heat conduction problems in curvilinear coordinate system. Numerical study to justify the validity of results.

Keywords: finite element method (FEM), finite element (SE), unsteady heat conduction, axially symmetric body curvilinear coordinate system.

Гуляр А.И., Пискунов С.О., Андриевский В.П., Максимюк Ю.В.

АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ ЗАДАЧ НЕСТАЦИОНАРНОЙ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

Приведены основные расчетные соотношения осесимметричных задач нестационарной теплопроводности в криволинейной системы координат. Проведенные многочисленные исследования для обоснования достоверности результатов.

Ключевые слова: метод конечных элементов (МКЭ), конечный элемент (СЭ), нестационарная теплопроводность, осесимметричные тела, криволинейная система координат.