

УДК 539.3

ДИНАМІЧНА СТІЙКІСТЬ ПАРАМЕТРИЧНИХ КОЛИВАНЬ ПРУЖНИХ СИСТЕМ

Присвячується професору Є.С. Дехтярюку

В.А. Баженов¹

доктор технічних наук, професор, завідувач кафедри будівельної механіки

О.О. Лук'яненко¹

кандидат технічних наук, доцент, старший науковий співробітник

Ю.В. Ворона¹

кандидат технічних наук, доцент, професор кафедри будівельної механіки

О.В. Костіна¹

кандидат технічних наук, старший науковий співробітник, старший науковий співробітник

¹*Київський національний університет будівництва і архітектури*

Динамічна стійкість параметричних коливань пружних систем при періодичних та стохастичних навантаженнях досліджена на основі редукованих дискретних математичних моделей. Редуковані матриці мас, жорсткості та геометричної жорсткості отримані за допомогою процедур сучасного програмного комплексу скінченно-елементного аналізу та створених авторами програм. Розв'язана задача динамічної стійкості періодичних параметричних коливань двотаврової балки з гофрованою синусоїдальною стінкою при головному та комбінованому резонансах. Оцінено вплив стаціонарного стохастичного параметричного навантаження на динамічну поведінку та стійкість пологої тонкостінної оболонки.

Ключові слова: параметричний резонанс, область нестійкості, метод скінченних елементів, редуковані матриці

Вступ. Серед динамічних задач механіки значне місце займають задачі про динамічну стійкість параметричних коливань пружних систем [1-17]. Першим кроком до їх розв'язання є створення редукованих дискретних математичних моделей, які дозволять отримати достовірну інформацію про динамічну поведінку та стійкість параметричних коливань систем. За допомогою аналітичних методів розв'язання таких задач є складним і містить деякі припущення, тому частіше застосовуються чисельні методи, які реалізовані в сучасних обчислювальних комплексах.

В статті представлена чисельна методика побудови редукованих дискретних моделей динамічної стійкості параметричних коливань пружних систем із застосуванням програмного комплексу скінченно-елементного аналізу NASTRAN [18]. Для отримання редукованих матриць мас, жорсткості, геометричної жорсткості та демпфірування

застосовані обчислювальні процедури програмного комплексу та спеціально розроблені авторами програми, які працюють з текстовим файлом комплексу. Виявлена особливість редукування рівнянь динамічної стійкості плоскої форми згину пружних систем при параметричному навантаженні. Сформульована задача побудови дискретної моделі стохастичної стійкості параметричних коливань пружних систем відносно моментних функцій другого порядку.

Чисельна методика застосована авторами при дослідженні динамічної стійкості параметричних коливань балки Ейлера [9], плоскої статично невизначеної рами [16], плоских ферм різної конфігурації [10], високої балки-стілки [10], двотаврової балки з гофрованою синусоїдальною стінкою [11], довгої гнучкої циліндричної оболонки [12] та пологої тонкостінної оболонки [1, 2]. В статті наведені результати дослідження динамічної стійкості періодичних параметричних коливань двотаврової балки з гофрованою синусоїдальною стінкою. Визначені області динамічної нестійкості плоскої форми згину балки при головному та комбінованому резонансах. Оцінено вплив періодичної складової параметричного навантаження на динамічну поведінку та стійкість гофрованої балки. Отримана система диференціальний рівнянь першого марківського наближення для других моментів, яка дозволила дослідити стійкість параметричних коливань пологої квадратної дералюмінієвої оболонки при дії дельта-корельованого стохастичного навантаження, визначити критичні значення стохастичної складової параметричного впливу при різних частотах схованої періодичності, побудувати області динамічної нестійкості.

1. Побудова редукованих моделей динамічної стійкості параметричних коливань пружних систем. Розрахункові математичні моделі дозволяють дослідити стійкість динамічних станів пружних систем, що обумовлені зовнішнім змінним за часом впливом. Вважається, що співвідношення між найменшими власними частотами пружної системи в незбудженому русі та частотами збудження таке, що при знаходженні незбудженого напружено-деформованого стану системи можливо застосовувати квазістатичне наближення і нехтувати переміщеннями в цьому стані. Якщо до рівняння статичної рівноваги системи додати даламберові сили інерції, дисипативні сили та деякі складові незбудженого напружено-деформованого стану, що залежать від часу, отримаємо рівняння динамічної стійкості пружної системи у вигляді

$$\tilde{M}\ddot{\bar{v}}(t) + \tilde{C}\dot{\bar{v}}(t) + \tilde{K}\bar{v}(t) + \alpha\tilde{K}_{G_1}\bar{v}(t) + \beta f(t)\tilde{K}_{G_2}\bar{v}(t) = 0, \quad (1)$$

де \tilde{M} та \tilde{K} – інерційний та пружний оператори, \tilde{K}_{G_1} та \tilde{K}_{G_2} – складові оператора параметричних сил в рівнянні квазістатичної рівноваги, \tilde{C} –

оператор, що враховує дисипативні сили. Область визначення розв'язків $v(\bar{x}, t)$ рівняння (1) збігається з областю визначення оператора \tilde{K} . Оператори \tilde{M} , \tilde{K} , \tilde{K}_{G_1} та \tilde{K}_{G_2} – позитивно визначенні. Рівняння (1) записано для випадку, коли параметричні сили задані з точністю до двох множників, один з яких α характеризує сталу складову зовнішнього впливу, а другий β – складову, що змінюється по часу за законом $f(t)$. Рівняння (1) представляють собою систему диференціальних рівнянь в частинних похідних, які доповненні відповідними граничними умовами. Незбудженому стану відповідає тривіальний розв'язок рівняння (1). Проблема динамічної стійкості формулюється як задача визначення області значень коефіцієнтів α , β та параметрів, що характеризують функцію $f(t)$, при яких тривіальний розв'язок рівняння є нестійким.

При проведенні прикладних розрахунків виконується перехід від операторного рівняння (1) до дискретної динамічної моделі. Для цього частіше застосовується метод скінчених елементів або метод скінчених різниць. Дискретна динамічна модель записується у вигляді звичайних диференціальних рівнянь

$$M\ddot{\bar{u}}(t) + C\dot{\bar{u}}(t) + K\bar{u}(t) + \alpha K_{G_1}\bar{u}(t) + \beta f(t)K_{G_2}\bar{u}(t) = 0, \quad (2)$$

де $\bar{u}(t) = (u_1(t), u_2(t), \dots, u_n(t))^T$ – вектор вузлових переміщень, M , K , K_{G_1} та K_{G_2} – позитивно визначені матриці мас, жорсткості та геометричної жорсткості відповідно, C – матриця демпфірування.

Рівняння (2) формулює задачу динамічної стійкості для систем із скінченим числом ступенів свободи. Це класична задача і в теперішній час існує багато підходів для її розв'язання, коли $f(t)$ є детерміністичною періодичною функцією [4, 6, 8, 17], а коли $f(t)$ є стаціонарний випадковий процес [5, 6, 8, 14]. Однак при розгляданні реальних об'єктів для адекватного описання його пружних властивостей необхідно будувати дискретні моделі (2) великого розміру. Пряме застосування таких моделей пов'язано з великими обчислювальними труднощами. Необхідно виконати редукцію вихідної дискретної моделі, при цьому суттєво враховуються характеристики параметричного впливу.

Для побудови редукованих моделей можна застосувати метод узагальнених координат. Нехай $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots, \bar{v}_m$ достатньо представлена система лінійно-незалежних векторів у просторі E_n . Нетривіальний розв'язок системи (2) можна апроксимувати виразом

$$\bar{u}(t) = V\bar{y}(t), \quad (3)$$

де матриця V розмірністю $n \times m$ визначається системою базисних векторів $\{\bar{v}_i\}_{i=1}^m$:

$$V = (\bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots, \bar{v}_m), \quad (4)$$

$\bar{y}(t) = (y_1(t), y_2(t), \dots, y_m(t))^T$ – вектор узагальнених координат. Виходячи з (2) та (3) відносно компонент вектора $\bar{y}(t)$ записується система m звичайних диференціальних рівнянь

$$V^T M V \ddot{\bar{y}}(t) + V^T C V \dot{\bar{y}}(t) + V^T K V \bar{y}(t) + \alpha V^T K_{G_1} V \bar{y}(t) + \beta f(t) V^T K_{G_2} V \bar{y}(t) = 0. \quad (5)$$

Система (5) записується у вигляді

$$M^* \ddot{\bar{y}}(t) + C^* \dot{\bar{y}}(t) + K^* \bar{y}(t) + \alpha K_{G_1}^* \bar{y}(t) + \beta f(t) K_{G_2}^* \bar{y}(t) = 0, \quad (6)$$

де редуковані матриці мас M^* , демпфірування C^* , жорсткості K^* , геометричної жорсткості $K_{G_1}^*$ та $K_{G_2}^*$ розмірністю $m \times m$ представляються відповідно виразами:

$$M^* = V^T M V, \quad (7)$$

$$C^* = V^T C V, \quad (8)$$

$$K^* = V^T K V, \quad (9)$$

$$K_{G_1}^* = V^T K_{G_1} V, \quad (10)$$

$$K_{G_2}^* = V^T K_{G_2} V. \quad (11)$$

При побудові редукованих моделей m береться значно менше за n ($m \ll n$), так що і для складних об'єктів дослідження динамічної стійкості може бути виконано. Однак, завжди залишається принциповим питання про адекватність моделі (6). Це питання вирішується з одного боку дослідженням внутрішньої збіжності результатів при збільшенні m , а з другого боку, застосуванням при редукції для порівняння інших базисних векторів.

В даній роботі розглядаються питання формування редукованих моделей виду (6) за допомогою сучасних обчислювальних комплексів. При цьому головні обчислювальні проблеми пов'язані з визначенням редукованих матриць. Для цього треба вміти обчислювальними процедурами відповідного обчислювального комплексу формувати матриці $MV, CV, KV, K_{G_1}V, K_{G_2}V$, j -ті стовпці яких представляють собою відповідно вектори $M\bar{v}_j, C\bar{v}_j, K\bar{v}_j, K_{G_1}\bar{v}_j, K_{G_2}\bar{v}_j$, де ($j = 1, 2, \dots, m$). Однак, в стандартних обчислювальних комплексах обчислювальних

процедур для визначення всіх цих векторів, як правило, нема. Є процедура для визначення реакції системи на задане поле переміщень \bar{v} , тобто для обчислення вектора $K\bar{v}$, де K - матриця жорсткості задачі, яка розглядається. Застосовуючи цю процедуру можна визначити вектори $M\bar{v}, K_{G_1}\bar{v}, K_{G_2}\bar{v}$, а при деяких умовах структуру матриці C та вектора $C\bar{v}$. Для цього крім вказаної вище процедури використовуються процедури аналізу вільних коливань та процедури розв'язання задачі стійкості.

Спочатку представляється алгоритм обчислення для будь-якого поля переміщень \bar{v} вектора $M\bar{v}$.

Для розглядуваної системи формулюється задача про визначення частот та форм власних коливань

$$(K - \omega^2 M)\bar{\varphi} = 0. \quad (12)$$

Нехай ω_k ($k=1,2,\dots,m_1$) – вектор частот власних коливань дискретної моделі, $\bar{\varphi}_k = (\varphi_{1k}, \varphi_{2k}, \dots, \varphi_{nk})^T$ ($k=1,2,\dots,m_1$) – система векторів власних форм коливань. Система векторів $\{\bar{\varphi}_k\}$ ортогональна, тобто

$$\begin{aligned} \bar{\varphi}_j^T M \bar{\varphi}_i &= 0, \\ \bar{\varphi}_j^T K \bar{\varphi}_i &= 0. \end{aligned} \quad (i \neq j).$$

За допомогою підмножини власних форм коливань $\{\bar{\varphi}_i\}_{i=1}^{m_1}$ можливо наближено представити поле переміщень \bar{v} у вигляді

$$\bar{v} \cong \sum_{i=1}^{m_1} a_i \bar{\varphi}_i. \quad (13)$$

В силу ортогональності векторів $\{\bar{\varphi}_i\}_{i=1}^{m_1}$

$$a_i = \frac{\bar{\varphi}_i^T K \bar{v}}{\bar{\varphi}_i^T K \bar{\varphi}_i}. \quad (14)$$

Внаслідок (12)

$$M \bar{\varphi}_i = \frac{1}{\omega_i^2} K \bar{\varphi}_i. \quad (15)$$

Тоді враховуючи (14) можна записати

$$M \bar{v} \cong \sum_{i=1}^{m_1} a_i M \bar{\varphi}_i \cong \sum_{i=1}^{m_1} \frac{a_i}{\omega_i^2} K \bar{\varphi}_i. \quad (16)$$

Таким чином, виходячи із процедури обчислення $K \bar{\varphi}_i$ ($i=1,2,\dots,m_1$), можна підрахувати вектор $M \bar{v}$.

Аналогічно будується алгоритм обчислення векторів $K_{G_1} \bar{v}$ та $K_{G_2} \bar{v}$ тільки замість процедури аналізу власних коливань застосовується процедура розв'язку задачі статичної стійкості. Спочатку розглядається алгоритм обчислення вектора $K_{G_1} \bar{v}$. Для системи формулюється задача стійкості

$$(K + \lambda K_{G_1}) \bar{\psi} = 0. \quad (17)$$

Нехай $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{m_2}$ – сукупність критичних значень задачі (17), $\bar{\psi}_1, \bar{\psi}_2, \dots, \bar{\psi}_{m_2}$ – відповідні форми втрати стійкості. Внаслідок виконаних вище припущень відносно властивостей матриць K та K_{G_1} ці вектори ортогональні в метриці, що визначається матрицею K_{G_1} , і відповідно матрицею K

$$\begin{aligned} \bar{\psi}_j^T K_{G_1} \bar{\psi}_i &= 0, \\ \bar{\psi}_j^T K \bar{\psi}_i &= 0. \end{aligned} \quad (i \neq j). \quad (18)$$

За допомогою підмножини форм втрати стійкості $\{\bar{\psi}_i\}_{i=1}^{m_2}$ наближено поле переміщень \bar{v} представляється у вигляді

$$\bar{v} \cong \sum_{i=1}^{m_2} b_i \bar{\psi}_i. \quad (19)$$

Аналогічно (16) можна записати, що вектор

$$K_{G_1} \bar{v} \cong \sum_{i=1}^{m_2} -\frac{b_i}{\lambda_i} K \bar{\psi}_i, \quad (20)$$

де

$$b_i = \frac{\bar{\psi}_i^T K \bar{v}}{\bar{\psi}_i^T K \bar{\psi}_i}. \quad (21)$$

Таким чином задача визначення вектора $K_{G_1} \bar{v}$ вирішена.

Так само визначається вектор $K_{G_2} \bar{v}$. Розглядається задача стійкості

$$(K + \mu K_{G_2}) \bar{\chi} = 0. \quad (22)$$

Нехай $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{m_3}$ – сукупність критичних значень задачі (22), $\bar{\chi}_1, \bar{\chi}_2, \dots, \bar{\chi}_{m_3}$ – відповідні ортогональні в метриці матриці жорсткості форми втрати стійкості.

Сукупність векторів $\{\bar{\chi}_i\}_{i=1}^{m_3}$ є базисом в просторі E_n , який задовольняє умовам

$$\begin{aligned} \bar{\chi}_j^T K_{G_2} \bar{\chi}_i &= 0, \\ \bar{\chi}_j^T K \bar{\chi}_i &= 0. \end{aligned} \quad (i \neq j). \quad (23)$$

За допомогою підмножини векторів $\bar{\chi}_i$ ($i=1,2,\dots,m_3$) аналогічно (13) поле переміщень \bar{v} можна наближено представити у вигляді

$$\bar{v} \cong \sum_{i=1}^{m_3} c_i \bar{\chi}_i, \quad (24)$$

де

$$c_i = \frac{\bar{\chi}_i^T K \bar{v}}{\bar{\chi}_i^T K \bar{\chi}_i}. \quad (25)$$

Аналогічно (20) вектор $K_{G_2} \bar{v}$ можна наближено представити у вигляді

$$K_{G_2} \bar{v} \cong \sum_{i=1}^{m_3} c_i K_{G_2} \bar{\chi}_i \cong \sum_{i=1}^{m_3} -\frac{c_i}{\mu_i} K \bar{\chi}_i. \quad (26)$$

Таким чином для довільного поля переміщень \bar{v} побудовані алгоритми апроксимації векторів $M\bar{v}$, $K_{G_1}\bar{v}$ та $K_{G_2}\bar{v}$ за допомогою процедури обчислення реакції $K\bar{v}$ та процедури розв'язку відповідних узагальнених задач на власні значення.

Для визначення вектора $C\bar{v}$ необхідно зробити додаткові припущення про структуру матриці демпфірування C . Далі матриця демпфірування C представлена у формі Релея:

$$C = d_0 M + d_1 K, \quad (27)$$

де d_0 та d_1 – довільні коефіцієнти пропорційності. В силу (16)

$$C\bar{v} \cong d_0 \sum_{i=1}^{m_1} \frac{a_i}{\omega_i^2} K \bar{\varphi}_i + d_1 K \bar{v}. \quad (28)$$

Тепер, коли для довільного поля переміщень \bar{v} сформульовані обчислювальні процедури для апроксимації векторів $M\bar{v}$, $C\bar{v}$, $K_{G_1}\bar{v}$ та $K_{G_2}\bar{v}$ можна перейти до побудови розрахункової динамічної моделі (6). Виходячи з представлень (16), (20), (26) та (28), можна записати представлення для матриць MV , CV , KV , $K_{G_1}V$, $K_{G_2}V$, що входять до формул (7), (8), (10), (11), та підрахувати апроксимації редукованих матриць мас M^* , демпфірування C^* , жорсткості K^* , геометричної

жорсткості $K_{G_1}^*$ та $K_{G_2}^*$. Приймається, що підмножина векторів $\{\bar{\varphi}_i\}_{i=1}^{m_1}$, $\{\bar{\psi}_i\}_{i=1}^{m_2}$ та $\{\bar{\chi}_i\}_{i=1}^{m_3}$ мають однакову розмірність m , тобто $m_1 = m_2 = m_3 = m$. Використовуючи (16), (20), (26), (28) та в силу (14), (21), (25), можна записати

$$MV = K\Phi\Omega^{-1}\Phi^T KV, \quad (29)$$

$$CV = d_0 K\Phi\Omega^{-1}\Phi^T KV + d_1 KV, \quad (30)$$

$$K_{G_1} V = K\Psi\Lambda^{-1}\Psi^T KV, \quad (31)$$

$$K_{G_2} V = KX\Theta^{-1}X^T KV. \quad (32)$$

Тут матриці Φ, Ψ та X розмірністю $n \times m$ визначаються співвідношеннями

$$\Phi = (\bar{\varphi}_1, \bar{\varphi}_2, \dots, \bar{\varphi}_m), \quad (33)$$

$$\Psi = (\bar{\psi}_1, \bar{\psi}_2, \dots, \bar{\psi}_m), \quad (34)$$

$$X = (\bar{\chi}_1, \bar{\chi}_2, \dots, \bar{\chi}_m), \quad (35)$$

а діагональні матриці $\Omega^{-1}, \Lambda^{-1}, \Theta^{-1}$ – співвідношеннями

$$\Omega^{-1} = \text{diag}(\omega_1^{-2}, \omega_2^{-2}, \dots, \omega_m^{-2}), \quad (36)$$

$$\Lambda^{-1} = \text{diag}(-\lambda_1^{-1}, -\lambda_2^{-1}, \dots, -\lambda_m^{-1}), \quad (37)$$

$$\Theta^{-1} = \text{diag}(-\mu_1^{-1}, -\mu_2^{-1}, \dots, -\mu_m^{-1}). \quad (38)$$

Редуковані матриці мас M^* , демпфірування C^* , жорсткості K^* , геометричної жорсткості $K_{G_1}^*$ та $K_{G_2}^*$ обчислюються за формулами

$$M^* = V^T K\Phi\Omega^{-1}\Phi^T KV, \quad (39)$$

$$CV = d_0 V^T K\Phi\Omega^{-1}\Phi^T KV + d_1 V^T KV = d_0 M^* + d_1 K^*, \quad (40)$$

$$K_{G_1}^* = V^T K\Psi\Lambda^{-1}\Psi^T KV, \quad (41)$$

$$K_{G_2}^* = V^T KX\Theta^{-1}X^T KV. \quad (42)$$

Таким чином, співвідношення (9), (39)-(42) дозволяють визначити усі коефіцієнти редукованої моделі (6).

1.1. Особливість редукування рівнянь динамічної стійкості плоскої форми згину пружних систем. Редукція дискретних моделей динамічної стійкості плоскої форми згину пружних систем має особливість, яка викликана видом параметричного впливу. В дискретній моделі (2) матриці мас, жорсткості та геометричної жорсткості повинні бути позитивно визначеними. При дії параметричного навантаження, яке

викликає плоску форму згину системи, ця умова буде виконана, якщо редуковані матриці геометричної жорсткості $K_{G_1}^*$ та $K_{G_2}^*$ будуть отримані із застосуванням розв'язку докритичного стану системи. Для цього згідно формули (12) знаходяться форми коливань системи та розв'язується нелінійна задача статки при поетапному навантаженні. В околі докритичного стану виконується згортання нелінійного оператора по базису, що складається з кількох нижніх форм коливань. При цьому в форми коливань вводиться малий параметр, який дає можливість відсікти квадратичну і кубічну складову згорнутого оператора. Різниця між таким згорнутим оператором і згорнутим лінійним оператором дає можливість отримати оператор геометричної жорсткості. Згортання операторів виконується шляхом знаходження векторів реакцій від векторів переміщень, які є формами коливань, і з подальшим скалярними добутками векторів реакцій на вектори переміщень.

Задача динамічної стійкості плоскої форми згину пружної системи має вигляд рівняння (6), в якому $\bar{y}(t) = \{u_1(t), \gamma_1(t)\}^T$ – вектор узагальнених координат. Базисними є вектори матриці власних форм коливань $\Phi = \{\bar{\varphi}_k\} = \{\bar{\varphi}_{1u}, \bar{\varphi}_{1\gamma}\}$, де $\bar{\varphi}_{1u}, \bar{\varphi}_{1\gamma}$ – вектори першої згинальної та першої крутильної форм коливань, які отримані при розв'язанні задачі на власні значення (12). Система векторів $\{\bar{\varphi}_{1u}, \bar{\varphi}_{1\gamma}\}$ ортогональна. В обчислювальному комплексі матриця власних форм нормована по матриці мас, тому редукована матриця мас $M^* = E = \text{diag}(1,1)$.

Редукована матриця жорсткості має вигляд

$$K^* = \text{diag}(\omega_{1u}^2, \omega_{1\gamma}^2), \quad (43)$$

де ω_{1u} та $\omega_{1\gamma}$ – частоти першої згинальної та першої крутильної форм коливань пружної системи.

Нелінійна задача статки формулюється таким чином

$$(K^* + K_G^*)(U + V) = P + R, \quad (44)$$

де U та V – матриці вузлових переміщень відповідно від навантаження та форм вільних коливань; K^* та K_G^* – редуковані матриці жорсткості та геометричної жорсткості відповідно; P – матриця вузлових навантажень; R – матриця реакцій пружної системи на задане поле переміщень.

У виразі (44)

$$K^* \cdot U = P, \quad K_G^* \cdot U = 0. \quad (45)$$

Представимо $R = R_K + R_{K_G}$, де R_K – матриця реакцій пружної системи на задане поле переміщень, що отримана при розв’язанні лінійної задачі статички

$$K^* \cdot V = R_K. \quad (46)$$

Нелінійність має місце при розв’язанні задачі

$$\lambda K_G^* \cdot V + \lambda^2 S \cdot V \cdot V + \lambda^3 T \cdot V \cdot V \cdot V = \lambda R_{K_G}, \quad (47)$$

де λ – коефіцієнт, що дозволяє зменшувати поле переміщень за модулем, S – квадратичний нелінійний оператор, T – кубічний нелінійний оператор, знак « \cdot » означає процедуру згортання операторів.

Квадратичні та кубічні оператори є малими величинами, тому вираз можна переписати у вигляді

$$\lambda K_G^* \cdot V = \lambda R_{K_G} \text{ або } K_G^* \cdot V = R_{K_G}. \quad (48)$$

При формулюванні задачі необхідно виконати умову ортогональності матриць R та P

$$R^T \cdot P = 0. \quad (49)$$

Для цього вводяться нові граничні умови, які дозволяють визначити реакцію пружної системи по тим степеням свободи, які є ортогональними дії навантаження.

Процедура нелінійної задачі статички з поетапним навантаженням дозволяє визначити матрицю реакцій системи R , яка може бути представлена у вигляді

$$(K^* + K_G^*) \cdot V = R. \quad (50)$$

Тоді редукована редукована матриця геометричної жорсткості обчислюється за формулою

$$(K^* + K_G^*) - (K^*) = K_G^* \quad (51)$$

і представляється у вигляді

$$K_G^* = \begin{bmatrix} k_{11}^* & k_{12}^* \\ k_{21}^* & k_{22}^* \end{bmatrix}. \quad (52)$$

Всі процедури виконуються автоматично в спеціально створеній програмі, яка працює з текстовим файлом обчислювального комплексу [18].

1.2. Формування редукованих моделей стохастичних параметричних коливань. Поведінка стохастичних систем описується за допомогою диференціальних рівнянь з коефіцієнтами, зміна значень яких має випадковий характер. Стійкість таких систем може розглядатися

як стійкість за ймовірністю, стійкість у середньому або по сукупності моментних функцій різних порядків [5, 14]. Типовою проблемою для цих задач є редукція нескінченної системи до скінченної. Для цього використовується функціональний або класичний підхід. Розв'язання проблеми за допомогою аналітичних методів є складним і містить деякі припущення, тому частіше застосовуються чисельні методи.

В роботі побудова редукованих моделей стохастичних параметричних коливань пружних систем виконується за допомогою розробленої авторами чисельної методики (див. п. 1) і асимптотичного методу. Цей метод заснований на розкладанні статистичних характеристик розв'язків динамічної задачі за малим параметром, який є відношенням часу кореляції випадкового впливу до характерних часових масштабів задачі. Проблема стійкості зводиться до дослідження стійкості тривіальних розв'язків диференціальних рівнянь, змінні коефіцієнти яких являють собою випадкові функції. Задача стійкості формулюється як задача стійкості відносно моментних функцій другого порядку, для отримання яких застосовується функціональний підхід [5, 14]. За рахунок розщеплення кореляції зовнішнього впливу на пружну систему з відповідними динамічними станами отримана система лінійних автономних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами.

Редукована дискретна модель стохастичних параметричних коливань пружної системи записується у вигляді системи звичайних диференціальних рівнянь

$$M^* \ddot{\bar{y}}(t) + C^* \dot{\bar{y}}(t) + K^* \bar{y}(t) + z(t)K_G^* \bar{y}(t) = 0, \quad (53)$$

де M^* , C^* , K^* та K_G^* – редуковані матриці мас, демпфірування, жорсткості та геометричної жорсткості відповідно, що обчислюються за методикою (п. 1), $\bar{y}(t)$ – n – вимірний вектор вузлових переміщень, $z(t)$ – випадковий процес, який характеризує інтенсивність параметричного впливу.

Якщо ввести $2m$ – вимірний вектор фазових змінних $\bar{\zeta}(t) = (\zeta_1(t), \zeta_2(t), \dots, \zeta_{2m}(t))^T = (y_1(t), y_2(t), \dots, y_m(t), \dot{y}_1(t), \dot{y}_2(t), \dots, \dot{y}_m(t))^T$, тоді систему (53) можна переписати в нормальній формі

$$\frac{d}{dt} \bar{\zeta}(t) = A \bar{\zeta}(t) + z(t)B \bar{\zeta}(t). \quad (54)$$

Матриці A і B обчислюються за формулами

$$A = \begin{bmatrix} 0 & E \\ -(M^*)^{-1} K^* & -(M^*)^{-1} C^* \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -(M^*)^{-1} K_G^* & 0 \end{bmatrix},$$

де E – одинична матриця розмірністю $m \times m$.

Для системи (3) розглядається задача Коші з початковими умовами $\vec{\zeta}(0) = \vec{\zeta}_0$, де вектор $\vec{\zeta}_0 = (\zeta_{01}, \zeta_{02}, \dots, \zeta_{02m})^T$ вважається детермінованим.

Питання про втрату динамічної стійкості оболонки еквівалентне питанню про стійкість тривіальних розв'язків рівнянь (54). При усередненні за ансамблем реалізацій системи (54) рівняння набувають вигляду

$$\frac{d}{dt} \langle \vec{\zeta}(t) \rangle = A \langle \vec{\zeta}(t) \rangle + B \langle z(t) \vec{\zeta}(t) \rangle, \quad \langle \vec{\zeta}(0) \rangle = \vec{\zeta}_0. \quad (55)$$

Система (55) незамкнута відносно змінних $\langle \vec{\zeta}(t) \rangle = (\langle \zeta_1(t) \rangle, \langle \zeta_2(t) \rangle, \dots, \langle \zeta_{2m}(t) \rangle)^T$, бо містить нові невідомі функції $\langle z(t) \vec{\zeta}(t) \rangle = (\langle z(t) \zeta_1(t) \rangle, \langle z(t) \zeta_2(t) \rangle, \dots, \langle z(t) \zeta_{2m}(t) \rangle)^T$, які є кореляціями в момент часу t випадкового процесу $z(t)$ з рішенням $\vec{\zeta}(t)$ системи (54), компоненти якого є функціоналами від випадкового процесу $z(t)$ в інтервалі $[0, t]$. При розгляданні системи (55) застосовується підхід розщеплення середнього добутку двох функціоналів. Якщо $R[z(\tau)]$ – деякий функціонал від Гаусового центрованого процесу, то для середнього добутку $\langle z(t) R[z(\tau)] \rangle$ має місце формула Фурутцу-Новікова [4]

$$\langle z(t) R[z(\tau)] \rangle = \int_0^t d\tau K(t-\tau) \left\langle \frac{\delta R[z]}{\delta z(\tau)} \right\rangle. \quad (56)$$

Тут $K(t)$ – кореляційна функція процесу $z(t)$, $\left\langle \frac{\delta R[z]}{\delta z(\tau)} \right\rangle$ – середнє варіаційної похідної від функціонала $R[z]$ по z в точці τ .

Для середнього $\langle z(t) \vec{\zeta}(t) \rangle$ формула (56) запишеться у вигляді

$$\langle z(t) \vec{\zeta}(t) \rangle = \int_0^t d\tau K(t-\tau) \left\langle \frac{\delta \vec{\zeta}(t)}{\delta z(\tau)} \right\rangle, \quad k = 1, 2, \dots, 2m. \quad (57)$$

З урахуванням (57) система (55) набуває виду:

$$\frac{d}{dt} \langle \vec{\zeta}(t) \rangle = A \langle \vec{\zeta}(t) \rangle + B \int_0^t d\tau K(t-\tau) \left\langle \frac{\delta \vec{\zeta}(t)}{\delta z(\tau)} \right\rangle, \quad \langle \vec{\zeta}(0) \rangle = \vec{\zeta}_0. \quad (58)$$

За допомогою розщеплення функціоналів зроблено перехід від незамкнutoї системи диференціальних рівнянь (55) відносно вектор-функцій $\langle \vec{\zeta}(t) \rangle$ та $\langle z(t) \vec{\zeta}(t) \rangle$ до незамкнutoї системи інтегрально-

диференціальних рівнянь відносно вектор-функцій $\langle \bar{\zeta}(t) \rangle$ та $\langle \frac{\delta \bar{\zeta}(t)}{\delta z(\tau)} \rangle$. Для

вектор-функцій $\langle \frac{\delta \bar{\zeta}(t)}{\delta z(\tau)} \rangle$ записується нова система інтегрально-диференціальних рівнянь. Вар'юючи (54) по $z(\tau)$ ($\tau < t$) маємо систему

$$\frac{d}{dt} \frac{\delta \bar{\zeta}(t)}{\delta z(\tau)} = A \frac{\delta \bar{\zeta}(t)}{\delta z(\tau)} + z(t) B \frac{\delta \bar{\zeta}(t)}{\delta z(\tau)}, \quad (59)$$

з початковими умовами $\frac{\delta \bar{\zeta}(t)}{\delta z(\tau)} = B \bar{\zeta}(\tau)$, $\frac{\delta \bar{\zeta}(t)}{\delta z(\tau)} = 0$.

Після усереднення (59) отримуємо систему інтегрально-диференціальних рівнянь

$$\frac{d}{dt} \langle \frac{\delta \bar{\zeta}(t)}{\delta z(\tau)} \rangle = A \langle \frac{\delta \bar{\zeta}(t)}{\delta z(\tau)} \rangle + B \langle z(t) \frac{\delta \bar{\zeta}(t)}{\delta z(\tau)} \rangle. \quad (60)$$

з початковими умовами

$$\langle \frac{\delta \bar{\zeta}(t)}{\delta z(\tau)} \rangle = B \langle \bar{\zeta}(\tau) \rangle, \quad \langle \frac{\delta \bar{\zeta}(t)}{\delta z(\tau)} \rangle = 0 \quad (t < \tau). \quad (61)$$

Система рівнянь (58), (60) та (61) незамкнута відносно змінних $\langle \bar{\zeta}(t) \rangle = (\langle \zeta_1(t) \rangle, \langle \zeta_2(t) \rangle, \dots, \langle \zeta_{2m}(t) \rangle)^T$ та

$\langle \frac{\delta \bar{\zeta}(t)}{\delta z(\tau)} \rangle = \left(\langle \frac{\delta \zeta_1(t)}{\delta z(\tau)} \rangle, \langle \frac{\delta \zeta_2(t)}{\delta z(\tau)} \rangle, \dots, \langle \frac{\delta \zeta_{2m}(t)}{\delta z(\tau)} \rangle \right)^T$. Вона містить нові невідомі

функції

$$\langle z(t) \frac{\delta \bar{\zeta}(t)}{\delta z(\tau)} \rangle = \left(\langle z(t) \frac{\delta \zeta_1(t)}{\delta z(\tau)} \rangle, \langle z(t) \frac{\delta \zeta_2(t)}{\delta z(\tau)} \rangle, \dots, \langle z(t) \frac{\delta \zeta_{2m}(t)}{\delta z(\tau)} \rangle \right)^T.$$

Знову застосуємо формулу Фурутцу-Новікова

$$\langle z(t) \frac{\delta \bar{\zeta}(t)}{\delta z(\tau)} \rangle = \int_0^t d\tau_1 K(t - \tau_1) \langle \frac{\delta^2 \bar{\zeta}(t)}{\delta z(\tau) \delta z(\tau_1)} \rangle, \quad (k = 1, 2, \dots, 2m), \quad (62)$$

де $\langle \frac{\delta^2 \bar{\zeta}(t)}{\delta z(\tau) \delta z(\tau_1)} \rangle$ – друга варіаційна похідна функціонала $\bar{\zeta}[z(\tau)]$ по $z(\tau)$ в момент часу ($\tau < t$) ($\tau_1 < t$). Аналогічно отримаємо рівняння

$$\frac{d}{dt} \langle \frac{\delta \bar{\zeta}(t)}{\delta z(\tau)} \rangle = A \langle \frac{\delta \bar{\zeta}(t)}{\delta z(\tau)} \rangle + B \int_0^t d\tau_1 K(t - \tau_1) \langle z(t) \frac{\delta^2 \bar{\zeta}(t)}{\delta z(\tau) \delta z(\tau_1)} \rangle. \quad (63)$$

Якщо продовжити цей процес, то можна отримати нескінченну послідовність рівнянь відносно моментних функцій другого порядку. В силу (54) для матриці $(\bar{\zeta}(t)\bar{\zeta}^T(t))$ записується матричне диференціальне рівняння

$$\frac{d}{dt}(\bar{\zeta}(t)\bar{\zeta}^T(t)) = (A + z(t)B)(\bar{\zeta}(t)\bar{\zeta}^T(t)) + (\bar{\zeta}(t)\bar{\zeta}^T(t))(A^T + z(t)B^T) \quad (64)$$

з початковими умовами $(\bar{\zeta}(0)\bar{\zeta}^T(0)) = (\bar{\zeta}_0\bar{\zeta}_0^T)$.

При усередненні за ансамблем реалізацій системи (64) рівняння набувають виду

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\langle\bar{\zeta}(t)\bar{\zeta}^T(t)\rangle &= A\langle\bar{\zeta}(t)\bar{\zeta}^T(t)\rangle + B\langle z(t)\bar{\zeta}(t)\bar{\zeta}^T(t)\rangle + \\ &+ \langle\bar{\zeta}(t)\bar{\zeta}^T(t)\rangle A^T + \langle z(t)\bar{\zeta}(t)\bar{\zeta}^T(t)\rangle B^T \end{aligned} \quad (65)$$

з початковими умовами $\langle\bar{\zeta}(0)\bar{\zeta}^T(0)\rangle = (\bar{\zeta}_0\bar{\zeta}_0^T)$. Система незамкнута відносно змінних $\langle\bar{\zeta}(t)\bar{\zeta}^T(t)\rangle = (\langle\zeta_1(t)\zeta_1^T(t)\rangle, \langle\zeta_2(t)\zeta_2^T(t)\rangle, \dots, \langle\zeta_{2m}(t)\zeta_{2m}^T(t)\rangle)^T$, бо містить нові функції $\langle z(t)\bar{\zeta}(t)\bar{\zeta}^T(t)\rangle = (\langle z(t)\zeta_1(t)\zeta_1^T(t)\rangle, \langle z(t)\zeta_2(t)\zeta_2^T(t)\rangle, \dots, \langle z(t)\zeta_{2m}(t)\zeta_{2m}^T(t)\rangle)^T$.

Застосуємо підхід розщеплення добутку двох функціоналів за формулою Фурутцу-Новікова

$$\langle z(t)\bar{\zeta}(t)\bar{\zeta}^T(t)\rangle = \int_0^t d\tau K(t-\tau) \left\langle \frac{\delta(\bar{\zeta}(t)\bar{\zeta}^T(t))}{\delta z(\tau)} \right\rangle, \quad k = 1, 2, \dots, 2m. \quad (66)$$

Система (65) запишеться у вигляді

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\langle\bar{\zeta}(t)\bar{\zeta}^T(t)\rangle &= A\langle\bar{\zeta}(t)\bar{\zeta}^T(t)\rangle + \langle\bar{\zeta}(t)\bar{\zeta}^T(t)\rangle A^T + \\ &+ B \int_0^t d\tau K(t-\tau) \left\langle \frac{\delta(\bar{\zeta}(t)\bar{\zeta}^T(t))}{\delta z(\tau)} \right\rangle + \int_0^t d\tau K(t-\tau) \left\langle \frac{\delta(\bar{\zeta}(t)\bar{\zeta}^T(t))}{\delta z(\tau)} \right\rangle B^T. \end{aligned} \quad (67)$$

Для вектор-функції $\delta(\bar{\zeta}(t)\bar{\zeta}^T(t))$ запишеться нова система інтегрально-диференціальних рівнянь

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\delta(\bar{\zeta}(t)\bar{\zeta}^T(t))}{\delta z(\tau)} &= A \frac{\delta(\bar{\zeta}(t)\bar{\zeta}^T(t))}{\delta z(\tau)} + z(t)B \frac{\delta(\bar{\zeta}(t)\bar{\zeta}^T(t))}{\delta z(\tau)} + \\ &+ \frac{\delta(\bar{\zeta}(t)\bar{\zeta}^T(t))}{\delta z(\tau)} A^T + z(t) \frac{\delta(\bar{\zeta}(t)\bar{\zeta}^T(t))}{\delta z(\tau)} B^T. \end{aligned} \quad (68)$$

При усередненні за ансамблем реалізацій системи (68) рівняння набувають вигляду

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left\langle \frac{\delta(\bar{\zeta}(t)\bar{\zeta}^T(t))}{\delta z(\tau)} \right\rangle &= A \left\langle \frac{\delta(\bar{\zeta}(t)\bar{\zeta}^T(t))}{\delta z(\tau)} \right\rangle + B \langle z(t) \frac{\delta(\bar{\zeta}(t)\bar{\zeta}^T(t))}{\delta z(\tau)} \rangle + \\ &+ \left\langle \frac{\delta(\bar{\zeta}(t)\bar{\zeta}^T(t))}{\delta z(\tau)} \right\rangle A^T + \langle z(t) \frac{\delta(\bar{\zeta}(t)\bar{\zeta}^T(t))}{\delta z(\tau)} \rangle B^T \end{aligned} \quad (69)$$

з початковими умовами

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\delta(\bar{\zeta}(t)\bar{\zeta}^T(t))}{\delta z(\tau)} \right\rangle &= B \langle \bar{\zeta}(t)\bar{\zeta}^T(t) \rangle + \langle \bar{\zeta}(t)\bar{\zeta}^T(t) \rangle B^T \\ \left\langle \frac{\delta(\bar{\zeta}(t)\bar{\zeta}^T(t))}{\delta z(\tau)} \right\rangle &= 0, \quad t < \tau. \end{aligned} \quad (70)$$

Знову застосуємо формулу Фурутцу-Новікова

$$\langle z(t) \frac{\delta(\bar{\zeta}(t)\bar{\zeta}^T(t))}{\delta z(\tau)} \rangle = \int_0^t d\tau_1 K(t-\tau_1) \left\langle \frac{\delta^2(\bar{\zeta}(t)\bar{\zeta}^T(t))}{\delta z(\tau)\delta z(\tau_1)} \right\rangle, \quad (71)$$

де $\left\langle \frac{\delta^2(\bar{\zeta}(t)\bar{\zeta}^T(t))}{\delta z(\tau)\delta z(\tau_1)} \right\rangle$ – друга варіаційна похідна функціонала.

В результаті наведеного вище підходу система (54) набуває вигляду зв'язаної нескінченної послідовності рівнянь для моментних функцій другого порядку

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left\langle \frac{\delta(\bar{\zeta}(t)\bar{\zeta}^T(t))}{\delta z(\tau)} \right\rangle &= A \left\langle \frac{\delta(\bar{\zeta}(t)\bar{\zeta}^T(t))}{\delta z(\tau)} \right\rangle + B \int_0^t d\tau_1 K(t-\tau_1) \left\langle \frac{\delta^2(\bar{\zeta}(t)\bar{\zeta}^T(t))}{\delta z(\tau)\delta z(\tau_1)} \right\rangle + \\ &+ \left\langle \frac{\delta(\bar{\zeta}(t)\bar{\zeta}^T(t))}{\delta z(\tau)} \right\rangle A^T + \int_0^t d\tau_1 K(t-\tau_1) \left\langle \frac{\delta^2(\bar{\zeta}(t)\bar{\zeta}^T(t))}{\delta z(\tau)\delta z(\tau_1)} \right\rangle B^T \end{aligned} \quad (72)$$

з початковими умовами

$$\left\langle \frac{\delta^2(\bar{\zeta}(\tau_1)\bar{\zeta}^T(\tau_1))}{\delta z(\tau)\delta z(\tau_1)} \right\rangle = B \left\langle \frac{\delta(\bar{\zeta}(t)\bar{\zeta}^T(t))}{\delta z(\tau)} \right\rangle + \left\langle \frac{\delta(\bar{\zeta}(t)\bar{\zeta}^T(t))}{\delta z(\tau)} \right\rangle B^T \quad (73)$$

$$\left\langle \frac{\delta^2(\bar{\zeta}(t)\bar{\zeta}^T(t))}{\delta z(\tau)\delta z(\tau_1)} \right\rangle = 0, \quad t < \tau.$$

Питання про стохастичну стійкість системи (54) зводиться до дослідження стійкості тривіальних рішень інтегрально-диференціальних рівнянь (72). Для подальших досліджень необхідно виконати редукцію нескінченної системи до скінченної системи. Для цього випадковий процес приймаємо дельта-корельованим з кореляційною функцією

$$K(\tau) = \sigma_0^2 e^{-\alpha\tau} \left(\cos \theta_\alpha \tau + \frac{\alpha}{\theta_\alpha} \sin \theta_\alpha \tau \right), \quad (74)$$

і скінченним часом кореляції

$$\tau_0 = \frac{1}{\sigma_0^2} \int K(\tau) d\tau = \frac{2\alpha}{\alpha^2 + \theta_\alpha^2}, \quad (75)$$

де $\sigma_0^2 = D$ – дисперсія стохастичного впливу; α – параметр кореляції, θ_α – частота схованої періодичності.

Матричне диференціальне рівняння для моментів другого порядку (72) станеться замкнутим, а інші рівняння нескінченної системи стають зайвими. Отримана система рівнянь представляє собою рівняння першого марківського наближення для других моментів

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \langle \bar{\zeta}(t) \bar{\zeta}^T(t) \rangle &= (A + DB^2) \langle \bar{\zeta}(t) \bar{\zeta}^T(t) \rangle + \\ &+ \langle \bar{\zeta}(t) \bar{\zeta}^T(t) \rangle (A + DB^2)^T + 2\sqrt{D}B \langle \bar{\zeta}(t) \bar{\zeta}^T(t) \rangle B^T, \end{aligned} \quad (76)$$

з початковими умовами $\langle \bar{\zeta}(0) \bar{\zeta}^T(0) \rangle = \langle \bar{\zeta}_0 \bar{\zeta}_0^T \rangle$.

Рівняння (76) дає змогу дослідити динамічну стійкість стохастичних параметричних коливань пружних систем, визначити області нестійкості і оцінити вплив стохастичної складової параметричного навантаження на поведінку системи.

2. Дослідження динамічної стійкості параметричних коливань пружних систем

2.1. Дослідження головних та комбінаційних параметричних резонансів двотаврової балки з гофрованою синусоїдальною стінкою. Двотаврова гофрована балка розглядається як система, що складається з двох поясів, гофрованої стінки та граничних ребер жорсткості. Балка має такі геометричні характеристики: $l=1000$ мм, $h=200$ мм, $b=80$ мм, $\delta_n=4$ мм, $\delta_{cm}=1,5$ мм. Пружні характеристики відповідають матеріалу сталь: $E=2,06E^{11}$ Па; $\mu=0,3$; $G=0,792E^{11}$ Па. Розрахункова скінченно-елементна модель балки (рис. 1,а), що побудована за допомогою обчислювального комплексу [18], містить 7227 вузлів та 8020 елементів. Стінка та полки моделюються пластинчатыми елементами, граничні ребра жорсткості – балочними. Поперечний переріз балки та геометричні параметри гофра (глибина f та довжина a) наведені на рис. 1,б.

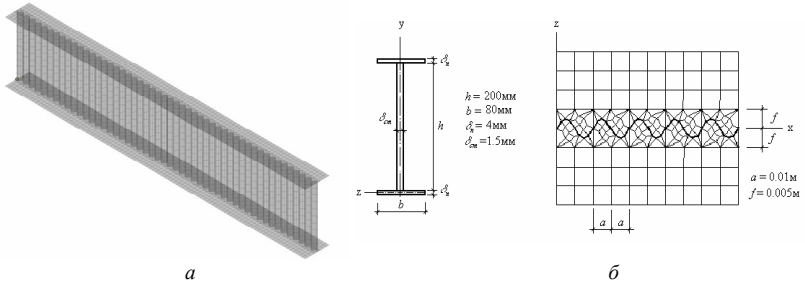


Рис. 1. Скінченно-елементна модель балки та параметри синусоїдального гофра

На балку діє розподілене періодичне навантаження, що викликає плоску форму згину балки з площині її стінки. Це навантаження є параметричним. Воно прикладається до вузлів, що розташовані посередині стінки балки вздовж її довжини, і дорівнює $q(t) = q_0 + q_t \cos \theta t$. Амплітуда статичної складової навантаження приймається рівною $q_0 = 100 \text{ H}$ на кожен вузол або $q_0 = 25525 \text{ H}$ на 1 м довжини синусоїдальної гофрованої стінки балки.

Для побудови редукованої матриці геометричної жорсткості застосовується процедура розв'язання задачі нелінійної статки при поетапному навантаженні пружної системи. Побудова матриці геометричної жорсткості виконується за допомогою згортання оператора на основі базису, що складається з форм коливань (рис. 2), і знаходження різниці між згорнутими операторами в околі докритичного і ненавантаженого станів (див. п. 1.1).

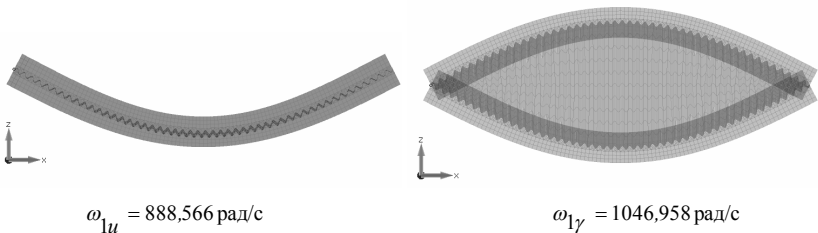


Рис. 2. Перші форми та частоти власних згинальних та крутильних коливань балки

Редукована розрахункова модель динамічної стійкості параметричних коливань балки набуває вигляду

$$\begin{cases} \ddot{u}_k + 888,566^2 [u_k - 2,161982 \times 10^{-6} q(t)\gamma_k] = 0, \\ \ddot{\gamma}_k + 1046,958^2 [\gamma_k - 1,50865 \times 10^{-6} q(t)u_k] = 0. \end{cases} \quad (k=1,2,3\dots) \quad (77)$$

Дослідження динамічної стійкості параметричних коливань гофрованої балки при дії розподіленого навантаження полягає у визначенні областей нестійкості при головних та комбінованих параметричних резонансах. Области нестійкості або області збудження – це області, в яких будь яке початкове відхилення буде необмежено збільшуватися з часом, тобто прямолінійна форма балки буде динамічно нестійкою. Ці області мають границі, які відповідають умові, при якій диференціальні рівняння мають періодичні або майже періодичні розв'язки з періодами T та $2T$. Головні резонанси відбуваються при частотах зовнішнього навантаження, що дорівнюють подвоєній частоті згинальних та крутильних власних коливань завантаженої балки. Области динамічної нестійкості параметричних коливань гофрованої балки відповідно при першому і другому головних резонансах (рис. 3, а, б) визначені для різних значень статичної q_0 та динамічної q_t складових розподіленого навантаження.

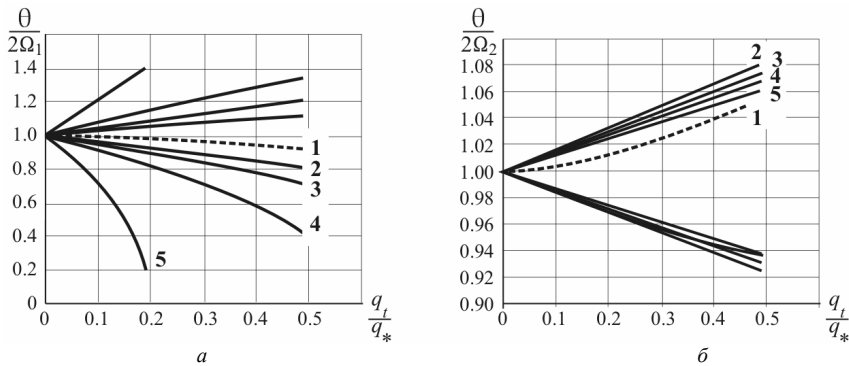


Рис. 3 Области нестійкості гофрованої балки при першому і другому головних резонансах: 1) $q_0=0$; 2) $q_0=0.3q_*$; 3) $q_0=0.5q_*$; 4) $q_0=0.7q_*$; 5) $q_0=0.9q_*$

Критичне значення статичної складової параметричного навантаження визначається чисельно і аналітично $q_* = 365510 \text{ H}$. Власні частоти завантаженої балки та границі областей динамічної нестійкості без урахування демпфірування визначені за допомогою формул Болотіна та Якубовича [4, 17].

Частоти власних коливань завантаженої балки обчислені згідно виразу

$$\Omega_{1(2)} = \frac{\omega_{1u(1\gamma)}}{\sqrt{2\lambda}} \sqrt{1 + \lambda - \sqrt{(1-\lambda)^2 + 4\lambda \frac{q_0^2}{q_*^2}}}, \quad (78)$$

де $\lambda = \frac{\omega_{1\gamma}}{\omega_{1u}} = 1,178$. Отримані частоти співпадають зі значеннями, які визначені чисельно за допомогою обчислювального комплексу [18].

Границі областей нестійкості параметричних коливань гофрованої балки при першому та другому головному резонансах обчислені за формулою

$$\theta_{1(2)}^{(1,2)} = \frac{2\omega_{1u(1\gamma)}}{\sqrt{2\lambda}} \sqrt{1 + \lambda - \sqrt{(1-\lambda)^2 + 4\lambda \frac{\left(q_0 \pm \frac{1}{2}q_t\right)^2}{q_*^2}}}. \quad (79)$$

Видно, що ширина області нестійкості при першому головному резонансі збільшується при збільшенні як статичної так і динамічної складової. Для другого головного параметричного резонансу ширина області нестійкості залежить лише від динамічної складової навантаження. Область нестійкості при першому головному резонансі більше за область другого головного резонансу.

Області нестійкості параметричних коливань балки при комбінованому резонансі представлені на рис. 4.

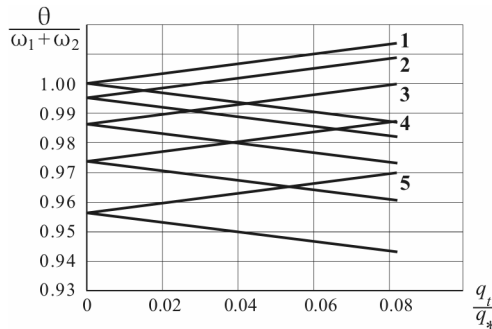


Рис. 4 Області нестійкості гофрованої балки при комбінованому резонансі:

1) $q_0=0$; 2) $q_0=0.3q_*$; 3) $q_0=0.5q_*$; 4) $q_0=0.7q_*$; 5) $q_0=0.9q_*$

Тут $\omega_1 = \omega_{1u}$, $\omega_2 = \omega_{1\gamma}$.

Границі області нестійкості обчислені за формулою

$$\theta^{(1,2)} = \omega_{1u} + \omega_{1\gamma} \pm \frac{q_t}{2\sqrt{\omega_{1u} \cdot \omega_{1\gamma}}} - \frac{\left(q_0^2 + \frac{1}{8}q_t^2\right)}{2(\omega_{1u} + \omega_{1\gamma})\omega_{1u} \cdot \omega_{1\gamma}}. \quad (80)$$

Видно, що при комбінованому резонансі ширина області нестійкості параметричних коливань гофрованої балки для всіх значень статичної складової навантаження однакова. Видно, що частота збудження зменшується і області нестійкості зміщуються вниз при збільшенні статичної складової параметричного навантаження.

2.2. Динамічна стійкість стохастичних параметричних коливань пологої тонкостінної оболонки. Для дослідження динамічної стійкості стохастичних параметричних коливань дералюмінієвої квадратної пологої тонкостінної оболонки формується редукована модель згідно представленому в п. 1.2 чисельному підходу. Оболонка має наступні вхідні дані: сторона $a = b = 0,480 \text{ м}$, товщина $h = 0,004 \text{ м}$, модуль пружності $E = 7,2 \times 10^7 \text{ кПа}$, питома вага $\rho = 2700 \text{ кг/м}^3$, коефіцієнт Пуасона $\mu = 0,3$, прогин в середині і на контурі $f = 0,096 \text{ м}$. Поверхня оболонки моделюється у вигляді сукупності трикутних плоских скінченних елементів зі шістьма ступенями вільності в вузлах (рис. 5). Вводяться обмеження згинальних і мембранних переміщень вузлів всіх чотирьох сторін оболонки. На оболонку зі сторони її випуклості діє поверхневе розподілене стохастичне параметричне навантаження $z(t) = z_0 + \tilde{z}(t)$, де z_0 – стала складова навантаження; $\tilde{z}(t)$ – дельта-корельована випадкова складова навантаження з кореляційною функцією (74) і скінченним радіусом кореляції (75).

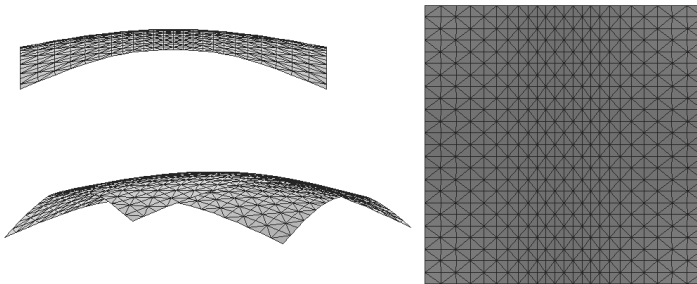
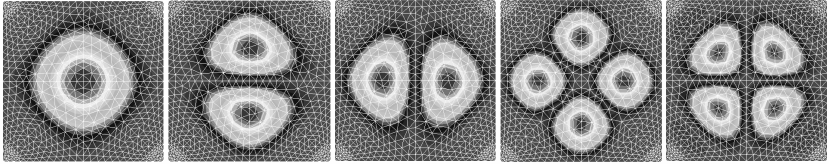


Рис. 5. Скінченно-елементна модель пологої оболонки

Вектори форм власних коливань оболонки $U = (\vec{\varphi}_1, \vec{\varphi}_2, \dots, \vec{\varphi}_m)$, де m – кількість утриманих форм, в обчислювальному комплексі нормовані по

матриці мас $M^* = U^T M U = E = \text{diag}(1, 1, \dots, 1)$. Форми та частоти власних коливань пологої оболонки визначаються чисельно згідно формули (12) за допомогою метода Ланцоша. На рис. 6 представлені п'ять перших форм власних коливань оболонки.



$\omega_1 = 1243, 4 \text{ рад/с}$ $\omega_2 = 2486, 8 \text{ рад/с}$ $\omega_3 = 2493, 2 \text{ рад/с}$ $\omega_4 = 3906, 2 \text{ рад/с}$ $\omega_5 = 4402, 3 \text{ рад/с}$

Рис. 6. Форми і частоти власних коливань пологої оболонки

Квадрати частот власних коливань оболонки є членами редукованої матриці жорсткості $K^* = \text{diag}(\omega_1^2, \omega_2^2, \dots, \omega_m^2)$. Редукована матриця демпфірування C^* має вигляд $C^* = U^T C U = \text{diag}(2\varepsilon_1 \omega_1, 2\varepsilon_2 \omega_2, \dots, 2\varepsilon_m \omega_m)$, де ε_i – коефіцієнт конструкційного демпфірування оболонки.

Для визначення редукованої матриці геометричної жорсткості розв'язується задача статичної стійкості (17). Значення критичної сталої складової поверхневого тиску наведені в таблиці 1. Форми втрати стійкості пологої оболонки співпадають з формами власних коливань (рис. 6).

Таблиця 1

Критичні значення сталої складової поверхневого тиску λ , $\kappa \text{Па}$									
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
155	274	276	429	457	518	637	638	748	754

Редукована матриця геометричної жорсткості має вигляд:

$$K_G^* = \begin{vmatrix} -110727 & 958 & 958 & 288 & 288 \\ -295484 & -1406926 & -1406926 & 536437 & 536437 \\ 204522 & -1031 & -1031 & -517892 & -517892 \\ 124630 & 2622 & 2622 & -2938378 & -2938378 \\ 50131 & 2717 & 2717 & 23776 & 23776 \end{vmatrix}$$

Редуковану модель стохастичної стійкості параметричних коливань оболонки запишемо у вигляді системи незв'язаних рівнянь першого марковського наближення для других моментів (76) у фазових змінних $\zeta_1(t) = y_1(t)$, $\zeta_2(t) = \dot{y}_1(t)$:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \langle \zeta_1^2(t) \rangle &= 2 \langle \zeta_1(t) \zeta_2(t) \rangle, \\ \frac{d}{dt} \langle \zeta_1(t) \zeta_2(t) \rangle &= \langle \zeta_2^2(t) \rangle - \omega_i^2 \langle \zeta_1^2(t) \rangle - 2\varepsilon_i \omega_i \langle \zeta_1(t) \zeta_2(t) \rangle, \\ \frac{d}{dt} \langle \zeta_2^2(t) \rangle &= -4\varepsilon_i \omega_i \langle \zeta_2^2(t) \rangle - 2\omega_i^2 \langle \zeta_1(t) \zeta_2(t) \rangle + a_i^2 \omega_i^4 \sigma_0^2 \tau_0 \langle \zeta_2^2(t) \rangle, \end{aligned} \quad (81)$$

з початковими умовами $\zeta_1(t) = y(t), \zeta_2(t) = \dot{y}(t), \zeta_1(0) = y_0, \zeta_2(0) = \dot{y}_0$.

Коефіцієнти $a_i = k_{gii}^* / \omega_i^2$ характеризують вплив сталої складової стохастичного параметричного навантаження на жорсткісні характеристики оболонки. Аналіз динамічної стійкості пологої оболонки при стохастичному параметричному навантаженні зводиться до дослідження стійкості рівнянь від моментних функцій другого порядку (82) по кожній формі коливань.

Досліджено вплив статичної складової параметричного навантаження z_0 на частоти власних коливань оболонки (рис. 7). Суцільна лінія відповідає частотам власних коливань навантаженої оболонки, штрихова лінія – ненавантаженої.

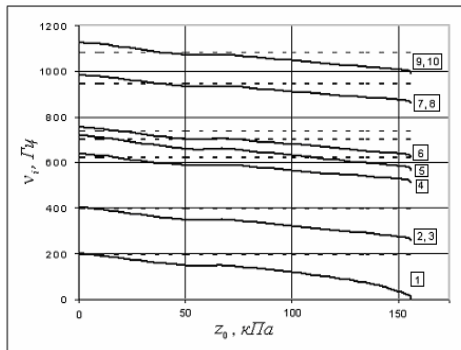


Рис. 7 Частоти власних коливань пологої оболонки

Видно, що при збільшенні z_0 власні частоти навантаженої оболонки зменшуються. Однак, при $z_0 < 40$ кПа по 4-10 формах коливань оболонка стає більш жорсткою. Перша частота власних коливань оболонки дорівнює нулю при $z_0 = 155$ кПа, що відповідає втраті стійкості.

Режими параметричних коливань оболонки досліджується за допомогою прямого методу чисельного інтегрування Рунге-Куты

четвертого порядку рівнянь (81). При дії статичної складової стохастичного навантаження z_0 спостерігаються стійкі режими гармонічних та затухаючих коливань оболонки відповідно без урахування та з урахуванням конструкційного демпфірування. При дії стохастичної складової параметричного навантаження z_t при $z_0 = 0$ спостерігаються як стійкі (рис. 8,а,в) так і нестійкі (рис. 8,б) режими параметричних коливань оболонки.

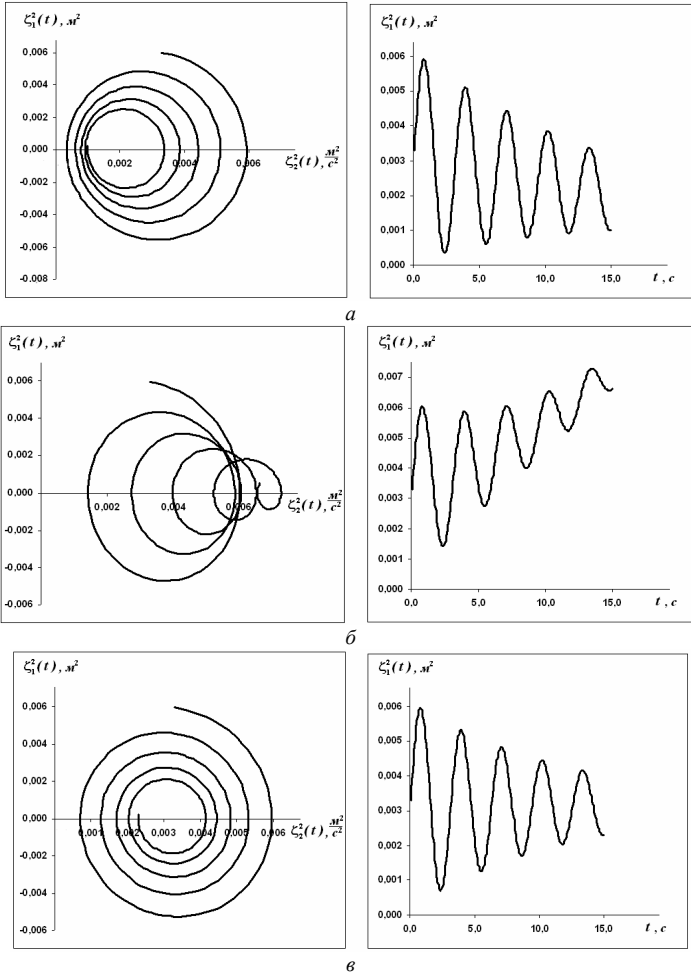


Рис. 8. Динамічні режими коливань оболонки при стохастичному параметричному впливі:
а) стійкий; б) нестійкий; в) стійкий режим на границі області стійкості

Якщо переписати систему детерміністичних диференціальних рівнянь (81) у вигляді лінійної автономної системи

$$\frac{d}{dt} \begin{Bmatrix} \langle \zeta_1^2(t) \rangle \\ \langle \zeta_1(t) \zeta_2(t) \rangle \\ \langle \zeta_2^2(t) \rangle \end{Bmatrix} = G(t) \begin{Bmatrix} \langle \zeta_1^2(t) \rangle \\ \langle \zeta_1(t) \zeta_2(t) \rangle \\ \langle \zeta_2^2(t) \rangle \end{Bmatrix}, \quad (82)$$

де $G(t)$ – матриця, коефіцієнти якої є $\frac{2\pi}{\omega}$ – періодичні функції

$$G(t) = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ -\omega_i^2 & -2\varepsilon_i \omega_i & 1 \\ a_i^2 \omega_i^4 \sigma_0^2 \tau_0 & -2\omega_i^2 & -4\varepsilon_i \omega_i \end{bmatrix}, \quad (83)$$

тоді аналіз стійкості оболонки зводиться до задачі про стійкість тривіальних розв'язків системи (83). За допомогою методу узагальнених показників Хілла розв'язується алгебраїчна задача на власні значення, визначаються характеристичні показники та границі області нестійкості системи (83). Якщо серед характеристичних показників Хілла є хоча б один з додатною дійсною частиною, тривіальний розв'язок системи є нестійким. Границі області нестійкості відповідають значення параметрів, при яких максимальна дійсна частина характеристичних показників дорівнює нулю. На рис. 9,а представлена поведінка характеристичних показників Хілла від впливу стохастичного параметричного навантаження на оболонку при частоті схованої періодичності $\theta_\alpha = \omega_1$, параметрі кореляції $\alpha = \varepsilon_1 \omega_1 = 0,0276 \omega_1$ та радіусі кореляції

$$\tau_0 = \frac{2\alpha}{\alpha^2 + \theta_\alpha^2} = \frac{0,0552}{\omega_1}. \text{ Дійсні частини характеристичних показників}$$

показані суцільною лінією, комплексні – штриховою.

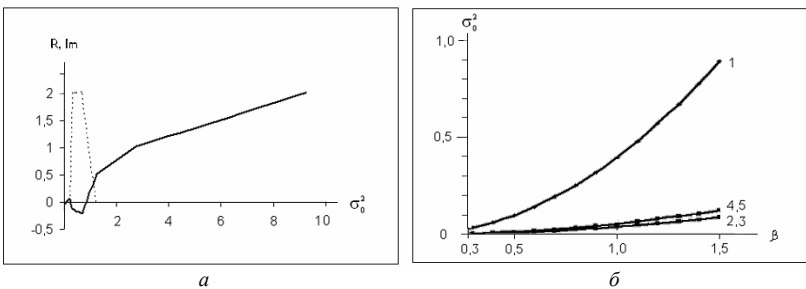


Рис. 9. Вплив стохастичної складової параметричного навантаження на динамічну поведінку оболонки

При нестійкому режиму коливань оболонки додатні дійсні частини характеристичних показників лежать у верхній півплощині. Точки перетину суцільної кривої з віссю координат σ_0^2 відповідають критичним значенням стохастичної складової параметричних коливань, які також представлені на рис. 9, б при зміні коефіцієнта $\beta = \theta_\alpha / \omega_1$. Зі збільшенням частоти схованої періодичності θ_α критичні навантаження зростають. Значення інтенсивності стохастичного навантаження, що лежать вище за криві по кожній формі коливань, належать до областей нестійкості оболонки. Для визначення критичного стохастичного навантаження з урахуванням всіх форм коливань необхідно виконати операцію сумування значень по окремих формах, що отримані для конкретної частоти схованої періодичності.

Висновок. Редуковані дискретні моделі динамічної стійкості параметричних коливань пружних систем дають змогу дослідити динамічну поведінку систем в часі, визначити режими коливань, оцінити вплив статичних та динамічних, в тому числі стохастичних, складових навантаження на стійкість параметричних коливань пружних систем.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Баженов В.А., Дехтярюк Е.С., Лук'яненко О.А., Костіна Е.В.* Численное построение редуцированных моделей стохастических параметрических колебаний пологих оболочек // Опір матеріалів і теорія споруд. К.: КНУБА, 2011. – Вип. 87. – С. 51–59.
2. *Баженов В.А., Лук'яненко О.О., Костіна О.В.* Динамічна поведінка пологої оболонки при стохастичному параметричному навантаженні // Опір матеріалів та теорія споруд. К.: КНУБА, 2012. – Вип. 89. – С. 31–38.
3. *Баженов В.А., Лук'яненко О.О., Костіна О.В., Геращенко О.В.* Вплив навантаження на частоту власних коливань складної оболонкової конструкції // Опір матеріалів та теорія споруд. - К.: КНУБА, 2013. – Вип. 91. – С. 49–58.
4. *Болотин В.В.* Динамическая устойчивость упругих систем. – М.: Гостехиздат, 1956 - 600 с.
5. *Болотин В.В.* Случайные колебания упругих систем. М., Наука, 1979. - 335 с.
6. *Вибрации в технике: Справочник. В 6-ти т./Ред. совет: В.Н. Челомей (пред.). – М.: Машиностроение, 1978—Т. 1. Колебания линейных систем /Под ред. В.В. Болотина. 1978. 352 с.,ил.*
7. *Вольмир А. С.* Устойчивость упругих систем. – М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1963. – 880 с.
8. *Вольмир А. С.* Нелинейная динамика пластин и оболочек. М.: Наука, 1982. - 432 с.
9. *Гоцуляк Є.О., Дехтярюк Є.С., Лук'яненко О.О., Борисенко В.Г.* Методика редукування рівнянь в задачах параметричних коливань конструкцій // Опір матеріалів і теорія споруд. К.: КНУБА, 2004. – Вип. 74. – С.
10. *Гоцуляк Є.О., Дехтярюк Є.С., Лук'яненко О.О., Борисенко В.Г.* Побудова редукованих рівнянь динамічної стійкості плоскої форми згину пружних систем. // Опір матеріалів і теорія споруд. К.: КНУБА, 2005. – Вип. 77. – С. 65–77.

11. Гоцуляк Є.О., Дехтярюк Є.С., Лук'янченко О.О. Визначення областей динамічної нестійкості параметричних коливань гофрованої двотаврової балки//Опір матеріалів та теорія споруд. - К.: КНУБА, 2009. – Вип.83. – С.15-24.
12. Гоцуляк Є.О., Дехтярюк Є.С., Лук'янченко О.О. Побудова редукованої моделі параметричних коливань циліндричної оболонки при чистому згині// Опір матеріалів та теорія споруд. К.: КНУБА, 2009. – Вип.84. – С.11-19.
13. Дехтярюк Є.С., Лук'янченко О.О., Отрашевська В.В. Динамічна стійкість пружних систем при комбінованому стохастичному навантаженні // Опір матеріалів і теорія споруд. К.: КНУБА, 2003. – Вип.72. – С.51 – 59.
14. Кляцкин В.И. Стохастические уравнения в случайно однородных средах М., Наука, 1980. - 336 с.
15. Лук'янченко О.О., Ворона Ю.В., Костіна О.В. Стохастичні параметричні коливання пружних систем з урахуванням їх попередніх станів// Опір матеріалів і теорія споруд. К.: КНУБА, 2014. – Вип.92. – С.102 – 113.
16. Лук'янченко О.О., Ворона Ю.В., Костіна О.В. Parametric resonance in statically indeterminate frames// Опір матеріалів та теорія споруд. К.: КНУБА, 2014. – Вип.93. – С.91 – 99.
17. Якубович В.А., Старжинский В.М. Линейные дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами и их приложения. М.: Наука, 1972 - 718 с.
18. Шимкович Д.Г. Расчет конструкций в MSC/NASTRAN for Windows. - М.: ДМК Пресс, 2001.- 448 с.

REFERENCES

1. Bazhenov V.A., Dehtyaryuk E.S., Lukyanchenko O.A., Kostina E.V. Chislennoe postroenie reduktirovannykh modeley stohasticheskikh parametricheskikh kolebaniy pologih obolochek (Numerical construction of reduced models of shallow shells stochastic parametric oscillations // Opir materialiv i teoriya sporud. K.: KNUBA, 2011. – V. 87. – S. 51 – 59.
2. Bazhenov V.A., Lukyanchenko O.O., Kostina O.V. Dynamiczna povedinka polohoyi obolonki pry stokhastichnomu parametrychnomu navantazheni (Dynamic behavior of a shallow shell under stochastic parametric load) // Opir materialiv i teoriya sporud. K.: KNUBA, 2012. – S. 31-38.
3. Bazhenov V.A., Lukyanchenko O.O., Kostina O.V., Gerashchenko O.V. Vplyv navantazheniya na chastoty vlasnykh kolyvan' skladnoyi obolonkovoyi konstruktsiyi (The influence of loads on the eigenfrequencies of complex shell structures) // Opir materialiv i teoriya sporud. K.: KNUBA, 2013. – V.91. – S.49-58.
4. Bolotin V.V. Dinamicheskaya ustoychivost' uprugikh sistem (The dynamic stability of elastic systems). – М.: Gostekhizdat, 1956. – 600 s.
5. Bolotin V.V. Sluchaynye kolebaniya uprugikh sistem (Random vibrations of elastic systems). М.: Nauka, 1979. - 335 s.
6. Vibratsii v tekhnike: Spravochnik (Vibration in engineering: Handbook). V 6-ty t./Red. sovet: V.N. Chelomey (pred.). – М.: Mashynostroenye, 1978-Т. 1. Kolebaniya lineynykh sistem (Oscillations of linear systems) /Pod red. V.V. Bolotina. 1978. – 352 s., il.
7. Volmir A.S. Ustoychivost' uprugikh sistem (Stability of elastic systems) – М.: Gosudarstvennoe izdatelstvo fiziko-matematicheskoy literatury, 1963. – 880 s.
8. Volmir A.S. Nelineynaya dinamika plastin i obolochek (Nonlinear dynamic of plates and shells). М.: Nauka, 1982. - 432 s.
9. Gotsulyak Ye.O., Dekhtyaryuk Ye.S., Lukyanchenko O.O., Borysenko V.H. Metodyka redukovannya rivnyan' v zadachakh parametrychnykh kolyvan' konstruktsiyi (Techniques of equations reduction in problems of structures parametric oscillation). // Opir materialiv i teoriya sporud. K.: KNUBA, 2004. – V. 74.

10. *Gotsulyak Ye.O., Dekhtyaryuk Ye.S., Lukyanchenko O.O., Borysenko V.H.* Pobudova redukovanykh rivnyan' dynamicchnoyi stiykosti ploskoyi formy zhynu pruzhnykh system (Derivation of dynamic stability reduced equations of elastic systems plane bending modes). // *Opir materialiv i teoriya sporud.* K.: KNUBA, 2005. – V.77. – S. 65-77.
11. *Gotsulyak Ye.O., Dekhtyaryuk Ye.S., Lukyanchenko O.O.* Vyznachennya oblastey dynamicchnoyi nestiykosti parametrychnykh kolyvan' hfovanoyi dvotavrovoyi balky (Determination of dynamic instability domains of corrugated I-beam parametric oscillation) // *Opir materialiv i teoriya sporud.* K.: KNUBA, 2009. – V. 83. – S.15-24.
12. *Gotsulyak Ye.O., Dekhtyaryuk Ye.S., Lukyanchenko O.O.* Pobudova redukovanoi modeli parametrychnykh kolyvan' tsylindrychnoyi obolonky pry chystomu zhyni (Reduced model of a cylindrical shell parametric oscillation under pure bending) // *Opir materialiv i teoriya sporud.* K.: KNUBA, 2009. – V.84. – S.11-19.
13. *Dekhtyaryuk Ye.S., Lukyanchenko O.O., Otrasheska V.V.* Dynamicchna stiykist pruzhnykh system pry kombinovanomu stokhastychnomu navantazhenni (Dynamic stability of elastic systems under combined stochastic load) // *Opir materialiv i teoriya sporud.* K.: KNUBA, 2003. – V. 72. – S.51 – 59.
14. *Klyatskin V.I.* Stokhasticheskie uravnenia v sluchaino odnorodnykh sredakh (Stochastic equations in randomly homogeneous media) M.: Nauka, 1980. - 336 s.
15. *Lukyanchenko O.O., Vorona Yu.V., Kostina O.V.* Stokhastychni parametrychni kolyvannya pruzhnykh system z urakhuvannyam yikh poperednykh staniv (Analysis of stochastic parametric oscillations of elastic systems taking into consideration their previous states) // *Opir materialiv i teoriya sporud.* K.: KNUBA, 2014. – V.92. – S.102 – 113.
16. *Lukyanchenko O.O., Vorona Yu.V., Kostina O.V.* Parametric resonance in statically indeterminate frames // *Opir materialiv i teoriya sporud.* K.: KNUBA, 2014. – V.93. – S.91 – 99.
17. *Yakubovich V.A., Starzhinskiy V.M.* Lineynye differentsial'nye uravneniya s periodicheskimi koefitsientami i ikh prilozheniya (Linear differential equations with periodic coefficients and its applications). – M.: Nauka, 1972. – 718 s.
18. *Shimkovich D.H.* Raschet konstruktsiy v MSC/NASTRAN for Windows (Structural analysis using MSC/NASTRAN for Windows). – M.: DMK Press, 2001. – 448 s.

Bazhenov V.A., Lukyanchenko O.O., Vorona Yu.V., Kostina O.V.

DYNAMIC STABILITY OF ELASTIC SYSTEMS PARAMETRIC OSCILLATIONS

Parametric resonance of elastic systems under periodic and stochastic loads is investigated on the basis of the reduced discrete mathematical models. Reduced mass matrix, stiffness matrix and geometric stiffness matrix are obtained using procedures of modern finite-element analysis software and with the help of computer code developed by authors. The problem of periodic parametric oscillations stability of an I-beam with a sine wave corrugated wall under the main and combined resonance was solved. The effect of stationary stochastic parametric load on the dynamic behavior and stability of shallow thin shell was estimated.

Keywords: parametric resonance, instability domain, finite element method, reduced matrixes.

Баженов В.А., Лукьянченко О.О., Ворона Ю.В., Костина Е.В.

ДИНАМИЧЕСКАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ ПАРАМЕТРИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЙ УПРУГИХ СИСТЕМ

Динамическая устойчивость параметрических колебаний упругих систем при периодических и стохастических нагрузках исследована на основе редуцированных дискретных математических моделей. Редуцированные матрицы масс, жесткости и геометрической жесткости получены с помощью процедур современного программного комплекса конечно-элементного анализа и созданных авторами программ. Решена задача динамической устойчивости периодических параметрических колебаний двутавровой балки с гофрированной синусоидальной стенкой при главном и комбинированном резонансах. Оценено влияние стационарной стохастической параметрической нагрузки на динамическое поведение и устойчивость пологой тонкостенной оболочки.

Ключевые слова: параметрический резонанс, область неустойчивости, метод конечных элементов, редуцированные матрицы.