УДК 539.3

ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДУ ГРАНИЧНИХ ІНТЕГРАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ДЛЯ РОЗВ'ЯЗАННЯ ДИНАМІЧНИХ ЗАДАЧ ТЕРМОПРУЖНОСТІ

Ю.В. Ворона[1]
кандидат технічних наук, доцент, професор кафедри будівельної механіки

І.Д. Кара[1]
аспірант кафедри будівельної механіки

[1]*Київський національний університет будівництва і архітектури*
Повітрофлотський просп., 31, м. Київ. 03680

Метод граничних інтегральних рівнянь застосовується для розв'язання в аналітичній формі зв'язаної задачі термопружності про поширення сферичних хвиль. Знайдені замкнені вирази повністю збігаються з розв'язками, отриманими традиційним способом.

Ключові слова*: фундаментальний розв'язок, термопружне середовище, сферичні хвилі.*

Вступ

Застосування апарату методу потенціалу для задач зв'язаної термопружності бере початок з робіт В.Новацького [1] і В.Д.Купрадзе [2], в яких було проведено узагальнення формули Соміліани та отримано фундаментальний розв'язок рівнянь термопружності (функцію Гріна для необмеженого термопружного середовища). Граничний аналог формули Соміліани традиційно використовується в якості граничного інтегрального рівняння (ГІР) відносно невизначених граничними умовами функцій переміщень, навантажень, температури та теплового потоку. Після виходу перших публікацій з'явилась досить велика кількість робіт (відзначимо, наприклад, [3-7]), присвячених різним аспектам чисельної реалізації методу ГІР. Водночас поза увагою дослідників деякою мірою залишились аналітичні можливості методу. Хоча область їх застосування обмежується тілами канонічної форми, при вмілому використанні вони дозволяють надійно контролювати важливі проміжні і вихідні розрахункові співвідношення і результати.

В даній статті аналітично з використанням ГІР розв'язується задача про поширення гармонічних сферичних хвиль в термопружному середовищі. Отримана зручна для перетворень та обчислень форма фундаментального розв'язку задачі та його узагальненої похідної. Наведені результати аналітичного інтегрування по сфері компонент фундаментального розв'язку. Проведене співставлення і відмічена збіжність отриманих даних з відомими розв'язками. Надалі результати статті будуть використані при побудові алгоритму та всебічному тестуванні програмних засобів для чисельного аналізу за методом граничних елементів термопружних коливань тривимірних елементів конструкцій довільної форми.

1. **Основні співвідношення**

Диференціальні співвідношення, які описують усталені гармонічні коливання з частотою ω однорідного термопружного тіла, за відсутності масових сил та внутрішніх теплових джерел мають вигляд

$$\mu u_{j,kk}+(\lambda+\mu)u_{k,kj}+\rho\omega^2 u_j-\gamma\theta_{,j}=0, \qquad (1)$$

$$\theta_{,kk}+\frac{i\omega}{\kappa}\theta+i\omega\eta u_{k,k}=0, \qquad (2)$$

де u_k – амплітудне значення компоненти вектора переміщень, λ і μ – константи Ламе, ρ – густина матеріалу, θ – амплітуда температури, $\gamma=3K\alpha_t$, α_t – коефіцієнт теплового розширення, K – модуль об'ємного стиснення $\left(K=\frac{3\lambda+2\mu}{3}\right)$, κ – коефіцієнт температуропровідності, $\eta=\frac{\gamma T_0}{\lambda_0}$, T_0 – температура в ненапруженому стані, λ_0 – коефіцієнт теплопровідності.

Амплітуди напружень визначаються за допомогою співвідношення Дюгамеля-Неймана

$$\sigma_{kj}=\delta_{kj}(\lambda e-\gamma\theta)+2\mu\varepsilon_{kj}, \qquad (3)$$

яке з урахуванням лінійного зв'язку між деформаціями ε_{kj} і переміщеннями

$$\varepsilon_{kj}=\frac{1}{2}(u_{k,j}+u_{j,k}),\ e=\varepsilon_{kk}=u_{k,k}$$

перетворюється на

$$\sigma_{kj}=\delta_{kj}(\lambda u_{m,m}-\gamma\theta)+\mu(u_{k,j}+u_{j,k}). \qquad (4)$$

В точках границі розрахункової області відомими є переміщення u_k або навантаження $t_k=\sigma_{jk}n_j$ (n_j – компонента вектора зовнішньої нормалі). Крім того, на границі має бути заданим або розподіл температури, або щільність теплового потоку q через поверхню, причому згідно із законом Фур'є $q=-\lambda_0\frac{\partial\theta}{\partial n}$

2. Фундаментальний розв'язок

Фундаментальний розв'язок задачі, наведений в [2], може бути поданий у вигляді сукупності чотирьох частин, перша з яких – це переміщення в напрямку осі x_k точок пружного простору від дії одиничної зосередженої сили, спрямованої вздовж осі x_j:

$$U_{kj}(r,\omega)=\frac{\delta_{kj}}{4\pi\mu}\frac{\exp[i\lambda_3(\omega)r]}{r}-\sum_{m=1}^{3}\alpha_m(\omega)\frac{\partial^2}{\partial x_k\partial x_j}\frac{\exp[i\lambda_m(\omega)r]}{r}\,,\ k,j=1,2,3,\quad (5)$$

де r – це відстань між точкою, в якій визначається переміщення та точкою, де діє зосереджена сила, $\alpha_1(\omega)=\dfrac{\lambda_2^2-k_1^2}{4\pi\rho\omega^2(\lambda_2^2-\lambda_1^2)}$, $\alpha_2(\omega)=\dfrac{k_1^2-\lambda_1^2}{4\pi\rho\omega^2(\lambda_2^2-\lambda_1^2)}$, $\alpha_3(\omega)=-\dfrac{1}{4\pi\rho\omega^2}$, $k_1^2=\dfrac{\rho\omega^2}{\lambda+2\mu}$, $\lambda_3^2=\dfrac{\rho\omega^2}{\mu}$. Крім того величини λ_1^2 і λ_2^2 задовольняють співвідношенням

$$\lambda_1^2+\lambda_2^2=\frac{\rho\omega^2}{\lambda+2\mu}+\frac{i\omega}{\kappa}+\frac{i\omega\eta\gamma}{\lambda+2\mu},\qquad \lambda_1^2\cdot\lambda_2^2=\frac{\rho\omega^2}{\lambda+2\mu}\cdot\frac{i\omega}{\kappa}\ .$$

Виконуючи в (5) диференціювання, отримаємо

$$U_{kj}(r,\omega)=\frac{\delta_{kj}}{4\pi\mu}\frac{\exp[i\lambda_3(\omega)r]}{r}-\sum_{m=1}^{3}\alpha_m(\omega)\left[\delta_{kj}U_0(r,\omega,m)+r,_j\,r,_k\,U_2(r,\omega,m)\right],$$

де

$$U_0(r,\omega,m)=\frac{\exp[i\lambda_m(\omega)r]}{r^3}[i\lambda_m(\omega)r-1]\,,$$

$$U_2(r,\omega,m)=\frac{\exp[i\lambda_m(\omega)r]}{r^3}[3-3i\lambda_m(\omega)r-\lambda_m^2(\omega)r^2]\,.$$

Далі друга частина фундаментального розв'язку – це температура точок пружного простору від дії одиничної зосередженої сили, спрямованої вздовж осі x_j:

$$U_{4j}(r,\omega)=\sum_{m=1}^{2}\beta_m(\omega)i\omega\eta\frac{\partial}{\partial x_j}\frac{\exp[i\lambda_m(\omega)r]}{r}\,,\ j=1,2,3,\qquad (6)$$

де

$$\beta_1(\omega)=-\beta_2(\omega)=-\frac{1}{4\pi(\lambda_2^2-\lambda_1^2)(\lambda+2\mu)}\,.$$

Після диференціювання отримаємо наступний вираз для компонент U_{4j}

$$U_{4j}(r,\omega)=\frac{i\omega\eta}{4\pi(\lambda_2^2-\lambda_1^2)(\lambda+2\mu)}r,_j\,r\left[U_0(r,\omega,2)-U_0(r,\omega,1)\right].$$

В свою чергу, третя частина фундаментального розв'язку – це переміщення від дії зосередженого теплового джерела, інтенсивність якого W дорівнює за величиною коефіцієнту теплопровідності λ_0, так що величина W/λ_0 дорівнює одиниці. Компоненти цієї третьої частини задаються виразом

$$U_{k4}(r,\omega)=-\sum_{m=1}^{2}\beta_m(\omega)\gamma\frac{\partial}{\partial x_k}\frac{\exp[i\lambda_m(\omega)r]}{r},\quad k=1,2,3,\quad (7)$$

який після диференціювання набуває вигляду

$$U_{k4}(r,\omega)=\frac{\gamma}{4\pi(\lambda_2^2-\lambda_1^2)(\lambda+2\mu)}r_{,k}\,r\left[U_0(r,\omega,1)-U_0(r,\omega,2)\right].$$

Нарешті, остання компонента матриці фундаментальних розв'язків задачі, що відповідає розподілу в просторі температури, яка спричинена дією згаданого вище зосередженого теплового джерела, визначається наступним чином

$$U_{44}(r,\omega)=\frac{1}{4\pi(\lambda_2^2-\lambda_1^2)}\left[(\lambda_2^2-k_1^2)\exp[i\lambda_2(\omega)r]-(\lambda_1^2-k_1^2)\exp[i\lambda_1(\omega)r]\right].\quad (8)$$

За допомогою співвідношень (4) неважко шляхом диференціювання отримати напруження в пружному середовищі на площинках з компонентами нормалі n_k. Напруження, що виникають внаслідок дії зосередженої сили мають вигляд

$$T_{jk}\left(r,\lambda_m\right)=n_j[\lambda U_{lk,l}-\gamma U_{4k}]+\mu n_l[U_{jk,l}+U_{lk,j}]\qquad k,j,l=1,2,3,\quad (9)$$

або після диференціювання та приведення подібних

$$\begin{aligned}T_{jk}\left(r,\lambda_m\right)=&\frac{1}{4\pi}\left[\delta_{jk}\frac{\partial r}{\partial n}+n_k r_{,j}+\frac{\lambda}{\mu}n_j r_{,k}\right]rU_0\left(r,\lambda_3\right)+\\&+\sum_{m=1}^{3}\left(\lambda\lambda_m^2\alpha_m-i\omega\gamma\eta\beta_m\right)n_j r_{,k}rU_0\left(r,\lambda_m\right)-\\&-2\mu\left\{\sum_{m=1}^{3}\alpha_m\left(\delta_{jk}\frac{\partial r}{\partial n}+n_k r_{,j}+n_j r_{,k}\right)\frac{1}{r}U_2\left(r,\lambda_m\right)+\right.\\&\left.+\sum_{m=1}^{3}\alpha_m r_{,j}r_{,k}\frac{\partial r}{\partial n}T_3\left(r,\lambda_m\right)\right\},\end{aligned}\quad (10)$$

де

$$T_3\left(r,\omega,m\right)=\frac{e^{i\lambda_m(\omega)r}}{r^4}\left[-i\lambda_m^3r^3+6\lambda_m^2r^2+15i\lambda_m r-15\right],$$

тоді як напруження, що виникають внаслідок дії зосередженого теплового джерела визначаються виразами

$$T_{j4}\left(r\right)=n_j\left[\lambda U_{k4,k}-\gamma U_{44}\right]+\mu n_k\left[U_{j4,k}+U_{k4,j}\right],\ k,j=1,2,3,$$

або

$$T_{j4}\left(r\right)=\frac{\gamma\mu}{2\pi\left(\lambda_2^2-\lambda_1^2\right)\left(\lambda+2\mu\right)}\left\{n_j[T_0(r,\omega,2)-T_0(r,\omega,1)]+\right.$$
$$\left.+r_{,j}\frac{\partial r}{\partial n}[U_2(r,\omega,1)-U_2(r,\omega,2)]\right\},$$

де

$$T_0\left(r,\omega,m\right)=\frac{e^{i\lambda_m(\omega)r}}{r^3}\left(\frac{\rho\omega^2}{2\mu}r^2-\lambda_m^2r^2-i\lambda_m r+1\right).$$

3. Граничні інтегральні рівняння

За наявності фундаментального розв’язку та його узагальненої похідної задача може бути досліджена за методом граничних інтегральних рівнянь. Вихідною точкою при цьому є узагальнені формули Соміліани, отримані в [1] на основі теорем взаємності:

$$u_k\left(p\right)+\int_\Gamma u_j\left(Q\right)T_{jk}\left(p,Q\right)d\Gamma-\int_\Gamma t_j\left(Q\right)U_{jk}\left(p,Q\right)d\Gamma=$$
$$=\frac{\gamma}{i\omega\eta}\left[\int_\Gamma\theta\left(Q\right)\frac{\partial U_{4k}\left(p,Q\right)}{\partial n}d\Gamma-\int_\Gamma\frac{\partial\theta\left(Q\right)}{\partial n}U_{44}\left(p,Q\right)d\Gamma\right], \quad (11)$$

де точка p знаходиться всередині розрахункової області, обмеженої границею Γ, а точка Q знаходиться на самій границі.

$$\frac{\partial U_{4k}(r,\omega)}{\partial n}=\frac{i\omega\eta}{4\pi(\lambda_2^2-\lambda_1^2)(\lambda+2\mu)}\left\{n_k\left[U_0(r,\omega,2)-U_0(r,\omega,1)\right]+\right.$$
$$\left.+r_{,k}\frac{\partial r}{\partial n}\left[U_2(r,\omega,2)-U_2(r,\omega,1)\right]\right\}, \quad (12)$$

та

$$\theta\left(p\right)+\int_\Gamma\theta\left(Q\right)\frac{\partial U_{44}}{\partial n}\left(p,Q\right)d\Gamma-\int_\Gamma\frac{\partial\theta}{\partial n}\left(Q\right)U_{44}\left(p,Q\right)d\Gamma=$$
$$=\frac{i\omega\eta}{\gamma}\left[\int_\Gamma u_j\left(Q\right)T_{j4}\left(p,Q\right)d\mathit{\Gamma}-\int_\Gamma t_j\left(Q\right)U_{j4}\left(p,Q\right)d\Gamma\right], \quad (13)$$

$$\frac{\partial U_{44}}{\partial n}=\frac{1}{4\pi\left(\lambda_2^2-\lambda_1^2\right)}r\frac{\partial r}{\partial n}\left[\left(\lambda_2^2-k_1^2\right)U_0\left(r,\omega,2\right)-\left(\lambda_1^2-k_1^2\right)U_0\left(r,\omega,1\right)\right]. \quad (14)$$

Граничні інтегральні рівняння відносно незаданих граничними умовами функцій отримаємо, якщо спрямуємо полюс p до точки P, яка знаходиться на границі. У тому разі, коли т. P лежить на гладкій ділянці границі, ГІР мають наступний вигляд

$$\frac{1}{2}u_k(P)+\int_\Gamma u_j(Q)T_{jk}(P,Q)d\Gamma-\int_\Gamma t_j(Q)U_{jk}(P,Q)d\Gamma=$$
$$=\frac{\gamma}{i\omega\eta}\left[\int_\Gamma \theta(Q)\frac{\partial U_{4k}(P,Q)}{\partial n}d\Gamma-\int_\Gamma \frac{\partial\theta(Q)}{\partial n}U_{44}(P,Q)d\Gamma\right], \tag{15}$$

$$\frac{1}{2}\theta(P)+\int_\Gamma \theta(Q)\frac{\partial U_{44}}{\partial n}(P,Q)d\Gamma-\int_\Gamma \frac{\partial\theta}{\partial n}(Q)U_{44}(P,Q)d\Gamma=$$
$$=\frac{i\omega\eta}{\gamma}\left[\int_\Gamma u_j(Q)T_{j4}(P,Q)d\Gamma-\int_\Gamma t_j(Q)U_{j4}(P,Q)d\Gamma\right], \tag{16}$$

причому всі інтеграли, що входять до складу рівнянь (15), (16) є сингулярними і розуміються за Коші.

ГІР (15), (16) складають алгоритмічну основу для розв’язання задачі про термопружні коливання масивних тіл.

4. Поширення сферичних хвиль в термопружному середовищі

4.1 Загальний підхід до розв’язання задачі

В якості прикладу розглянемо розповсюдження гармонічних хвиль від сферичної порожнини радіусу a. В такому разі потенціал амлітуд радіальних переміщень задається виразом [1]

$$\Phi(R)=\frac{A_1 e^{i\lambda_1 R}+A_2 e^{i\lambda_2 R}}{R},$$

де R – радіальна координата.

За відомого потенціалу температуру можна знайти з рівняння

$$\left(\Delta+k_1^2\right)\Phi-m\theta=0, \tag{17}$$

де $k_1^2=\dfrac{\rho\omega^2}{\lambda+2\mu}$, $m=\dfrac{\gamma}{\lambda+2\mu}$, .а оператор Δ – Лапласа.

Зважаючи на те, що у випадку центральної симетрії

$$\Delta\equiv\left(\partial^2/\partial R^2\right)+\left(2/R\right)\left(\partial/\partial R\right),$$

шляхом безпосереднього диференціювання знаходимо

$$\Delta\Phi(R)=-\frac{A_1\lambda_1^2 e^{i\lambda_1 R}+A_2\lambda_2^2 e^{i\lambda_2 R}}{R},$$

після чого з виразу (17) для визначення температури будемо мати

$$\theta(R)=\frac{A_1(k_1^2-\lambda_1^2)e^{i\lambda_1 R}+A_2(k_1^2-\lambda_2^2)e^{i\lambda_2 R}}{mR}. \tag{18}$$

В свою чергу вирази для радіальних переміщень і напружень мають вигляд

$$u_R(R)=\frac{\partial\Phi}{\partial R}=\frac{A_1(i\lambda_1 R-1)e^{i\lambda_1 R}+A_2(i\lambda_2 R-1)e^{i\lambda_2 R}}{R^2}, \tag{19}$$

$$\sigma_{RR}(R)=-\frac{4\mu}{R}\frac{\partial\Phi}{\partial R}-\rho\omega^2\Phi=$$
$$=-\frac{4\mu}{R^3}\left[A_1(i\lambda_1 R-1+0,25\lambda_3^2R^2)e^{i\lambda_1 R}+A_2(i\lambda_2 R-1+0,25\lambda_3^2R^2)e^{i\lambda_2 R}\right]. \tag{20}$$

За допомогою співвідношень (17)-(20) може бути розв'язана значна кількість задач про поширення гармонічних сферичних хвиль. Так, якщо на границі порожнини задані умови $u_R(a)=0,\ \theta(a)=\theta_a$, то підставивши $R=a$ у вирази (18) і (19), виходячи з граничних умов, отримаємо систему алгебраїчних рівнянь відносно коефіцієнтів A_1, A_2, розв'язавши яку будемо мати

$$A_1=-\frac{\theta_a ma}{Z_u}(i\lambda_2 a-1)e^{-i\lambda_1 a},\quad A_2=\frac{\theta_a ma}{Z_u}(i\lambda_1 a-1)e^{-i\lambda_2 a}.$$

Тут введено позначення $Z_u=(k_1^2-\lambda_2^2)(i\lambda_1 a-1)-(k_1^2-\lambda_1^2)(i\lambda_2 a-1)$.

Отже, розв'язок задачі має наступний вигляд

$$\theta(R)=\frac{\theta_a\,a}{RZ_u}\left[(k_1^2-\lambda_2^2)(i\lambda_1 a-1)e^{i\lambda_2(R-a)}-(k_1^2-\lambda_1^2)(i\lambda_2 a-1)e^{i\lambda_1(R-a)}\right],$$

$$\frac{\partial\theta(R)}{\partial R}=-\frac{\theta_a\,a}{R^2Z_u}\Big[(k_1^2-\lambda_1^2)(i\lambda_2 a-1)(i\lambda_1 R-1)e^{i\lambda_1(R-a)}-$$
$$-(k_1^2-\lambda_2^2)(i\lambda_1 a-1)(i\lambda_2 R-1)e^{i\lambda_2(R-a)}\Big],$$

$$u_R(R)=\frac{\theta_a\,ma}{R^2Z_u}\left[(i\lambda_2 R-1)(i\lambda_1 a-1)e^{i\lambda_2(R-a)}-(i\lambda_1 R-1)(i\lambda_2 a-1)e^{i\lambda_1(R-a)}\right],$$

$$\sigma_{RR}(R)=\frac{4\mu\theta_a\,ma}{R^3Z_u}\Big[(i\lambda_1 a-1)(1-i\lambda_2 R-0,25\lambda_3^2R^2)e^{i\lambda_2(R-a)}-$$
$$-(i\lambda_2 a-1)(1-i\lambda_1 R-0,25\lambda_3^2R^2)e^{i\lambda_1(R-a)}\Big].$$

На границі параметри НДС мають наступні значення

$$u_R(a)=0,\qquad \theta(a)=\theta_a,$$

$$\frac{\partial\theta}{\partial n} = -\frac{\partial\theta(a)}{\partial R} = \frac{\theta_a}{aZ_u}(\lambda_2^2 - \lambda_1^2)(i\lambda_2 a - 1)(i\lambda_1 a - 1)\,, \tag{21}$$

$$t_R = -\sigma_{RR}(a) = \frac{\theta_a\, ma}{Z_u}\mu i(\lambda_1 - \lambda_2)\lambda_3^2\,. \tag{22}$$

4.2 Застосування методу ГІР

Розв’яжемо тепер цю задачу, користуючись методом ГІР. З урахуванням центральної симетрії рівняння (15), (16) можна записати таким чином

$$\begin{gathered} u_R(a)\left[\frac{1}{2} + \int_\Gamma n_k(P)n_j(Q)T_{jk}(P,Q)d\Gamma\right] - t_R\int_\Gamma n_k(P)n_j(Q)U_{jk}(P,Q)d\Gamma = \\ = \frac{\gamma}{i\omega\eta}\left[\theta_a\int_\Gamma n_k(P)\frac{\partial U_{4k}}{\partial n}(P,Q)d\Gamma - \frac{\partial\theta}{\partial n}\int_\Gamma n_k(P)U_{44}(P,Q)d\Gamma\right], \end{gathered} \tag{23}$$

$$\begin{gathered} \theta_a\left[\frac{1}{2} + \int_\Gamma \frac{\partial U_{44}}{\partial n}(P,Q)d\Gamma\right] - \frac{\partial\theta}{\partial n}\int_\Gamma U_{44}(P,Q)d\Gamma = \\ = -\frac{i\omega\eta}{\gamma}\left[u_R(a)\int_\Gamma n_j(Q)T_{j4}(P,Q)d\Gamma - t_R\int_\Gamma n_j(Q)U_{j4}(P,Q)d\Gamma\right]. \end{gathered} \tag{24}$$

Інтеграли по поверхні сфери, які входять у рівняння (23), (24), можуть бути визначені аналітично:

$$\int_{\Gamma_s} U_{44}(P,Q)d\Gamma = \frac{i}{2(\lambda_2^2 - \lambda_1^2)}\left[\frac{(\lambda_1^2 - k_1^2)}{\lambda_1}(e^{2i\lambda_1 a} - 1) - \frac{(\lambda_2^2 - k_1^2)}{\lambda_2}(e^{2i\lambda_2 a} - 1)\right], \tag{25}$$

$$\begin{gathered} \int_{\Gamma_s}\frac{\partial U_{44}(P,Q)}{\partial n}d\Gamma = \frac{1}{2(\lambda_2^2 - \lambda_1^2)}\left\{(\lambda_1^2 - k_1^2)\left[e^{2i\lambda_1 a}\left(1 - \frac{1}{i\lambda_1 a}\right) + \frac{1}{i\lambda_1 a}\right] - \right. \\ \left. -(\lambda_2^2 - k_1^2)\left[e^{2i\lambda_2 a}\left(1 - \frac{1}{i\lambda_2 a}\right) + \frac{1}{i\lambda_2 a}\right]\right\}, \end{gathered} \tag{26}$$

$$\begin{gathered} \int_{\Gamma_s} n_j(Q)U_{j4}(P,Q)d\Gamma = \frac{m}{2(\lambda_2^2 - \lambda_1^2)}\left[\frac{i}{a}\left(\frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_2}\right) + \right. \\ \left. + e^{2i\lambda_2 a}\left(1 - \frac{1}{i\lambda_2 a}\right) - e^{2i\lambda_1 a}\left(1 - \frac{1}{i\lambda_1 a}\right)\right], \end{gathered} \tag{27}$$

$$\int\limits_{\Gamma_s} n_j(Q) T_{j4}(P,Q) d\Gamma = \frac{\mu m}{(\lambda_2^2-\lambda_1^2)}\left[i\left(\frac{1}{\lambda_1}-\frac{1}{\lambda_2}\right)\left(\frac{2}{a^2}-\frac{k_2^2}{2}\right)+\right.$$

$$\left.+\frac{e^{2i\lambda_2 a}}{a}\left(2-\frac{2}{i\lambda_2 a}+\frac{k_2^2 a}{2i\lambda_2}\right)-\frac{e^{2i\lambda_1 a}}{a}\left(2-\frac{2}{i\lambda_1 a}+\frac{k_2^2 a}{2i\lambda_1}\right)\right], \quad (28)$$

$$\int\limits_{\Gamma_s} n_k(P) U_{4k}(P,Q) d\Gamma = \frac{i\omega\eta}{2(\lambda_2^2-\lambda_1^2)(\lambda+2\mu)}\left[\frac{i}{a}\left(\frac{1}{\lambda_1}-\frac{1}{\lambda_2}\right)+\right.$$

$$\left.+e^{2i\lambda_2 a}\left(1-\frac{1}{i\lambda_2 a}\right)-e^{2i\lambda_1 a}\left(1-\frac{1}{i\lambda_1 a}\right)\right], \quad (29)$$

$$\int\limits_{\Gamma_s} n_k(P)\frac{\partial U_{4k}}{\partial n}(P,Q) d\Gamma = \frac{i\omega\eta}{2(\lambda_2^2-\lambda_1^2)(\lambda+2\mu)}\left[i(\lambda_1-\lambda_2)+\frac{i}{a^2}\left(\frac{1}{\lambda_1}-\frac{1}{\lambda_2}\right)+\right.$$

$$\left.+\frac{e^{2i\lambda_2 a}}{a}\left(2-\frac{1}{i\lambda_2 a}-i\lambda_2 a\right)-\frac{e^{2i\lambda_1 a}}{a}\left(2-\frac{1}{i\lambda_1 a}-i\lambda_1 a\right)\right], \quad (30)$$

$$\int\limits_{\Gamma_s} n_k(P) n_j(Q) U_{jk}(P,Q) d\Gamma = \frac{i}{2\mu a^2\lambda_3^3}\left[1+a^2\lambda_3^2+e^{2ia\lambda_3}\left(a^2\lambda_3^2+2ia\lambda_3-1\right)\right]-$$

$$-2\pi\sum_{m=1}^{3}\alpha_m\left[\frac{e^{2ia\lambda_m}}{a}\left(2-ia\lambda_m-\frac{1}{ia\lambda_m}\right)-i\lambda_m+\frac{1}{ia^2\lambda_m}\right], \quad (31)$$

$$\int\limits_{\Gamma} n_k(P) n_j(Q) T_{jk}(P,Q) d\Gamma_s = \frac{\lambda}{2\mu}\left[e^{2ia\lambda_3}\left(1-\frac{1}{ia\lambda_3}\right)+\frac{1}{ia\lambda_3}\right]+$$

$$\frac{e^{2ia\lambda_3}}{a^3\lambda_3^3}\left(a^3\lambda_3^3+3ia^2\lambda_3^2-4a\lambda_3-2i\right)+ia^2\lambda_3^2+2i\Big]+$$

$$+2\pi\sum_{m=1}^{3}\left(\lambda\lambda_m^2\alpha_m-i\omega\eta\gamma\beta_m\right)\left[e^{2ia\lambda_m}\left(1-\frac{1}{ia\lambda_m}\right)+\frac{1}{ia\lambda_m}\right]-$$

$$-2\mu\frac{\pi}{a^2}\sum_{m=1}^{3}\alpha_m\left[e^{2ia\lambda_m}\left(8-6ia\lambda_m-\frac{4}{ia\lambda_m}-2a^2\lambda_m^2\right)-2i\lambda_m a+\frac{4}{ia\lambda_m}\right]. \quad (32)$$

Отже, система ГІР (15), (16) перетворилась на систему двох лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\begin{cases} A_{21}t_R - B_{21}\dfrac{\partial\theta}{\partial n} = B_{11}\theta_a \\ A_{22}t_R - B_{22}\dfrac{\partial\theta}{\partial n} = B_{12}\theta_a \ , \end{cases} \tag{33}$$

де введені позначення

$$A_{21} = -\int\limits_{\Gamma_s} n_k(P)n_j(Q)U_{jk}(P,Q)d\Gamma\ , \quad A_{22} = -\frac{i\omega\eta}{\gamma}\int\limits_{\Gamma_s} n_j(Q)U_{j4}(P,Q)d\Gamma\ ,$$

$$B_{21} = -\frac{\gamma}{i\omega\eta}\int\limits_{\Gamma_s} n_k(P)U_{4k}(P,Q)d\Gamma\ , \quad B_{11} = \frac{\gamma}{i\omega\eta}\int\limits_{\Gamma_s} n_k(P)\frac{\partial U_{4k}(P,Q)}{\partial n}d\Gamma\ ,$$

$$B_{22} = -\int\limits_{\Gamma_s} U_{44}(P,Q)d\Gamma\ , \quad B_{11} = \frac{1}{2} + \int\limits_{\Gamma_s} \frac{\partial U_{44}(P,Q)}{\partial n}d\Gamma\ .$$

Розв'язок системи (33) після деяких алгебраїчних перетворень набуває вигляду, що повністю співпадає з (21), (22). На рисунку 1 показані графіки зміни знайдених граничних параметрів термопружного стану в залежності від безрозмірного параметру частоти $p = \omega a\sqrt{\dfrac{\rho}{\lambda + 2\mu}}$. Цифрами 1 і 2 помічені відповідно дійсна і уявна частини нормованої функції граничних радіальних навантажень $t_R^{norm} = \dfrac{t_R}{\mu\theta_a m}\cdot 10^5$, а цифрами 3 і 4 – дійсна і уявна частини величини $\dfrac{\partial\theta^{norm}}{\partial n} = \dfrac{\partial\theta}{\partial n}\dfrac{a}{\theta_a}\cdot 10^{-4}$.

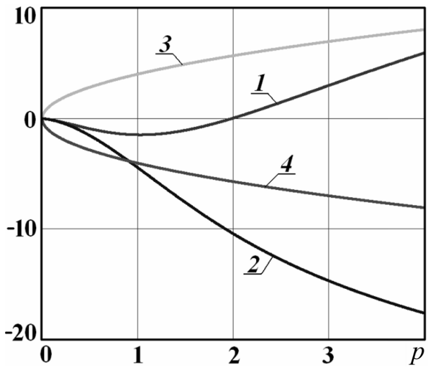

Рис. 1

Розв'язки задач про розповсюдження термопружних хвиль від сферичної порожнини при деяких інших варіантах граничних умов наведені в [1]. Так у разі, коли у всіх точках границі амплітуди температури однакові і дорівнюють θ_a, а силові навантаження відсутні ($t_R = 0$), амплітуди шуканих параметрів на границі порожнини дорівнюють

$$\frac{\partial\theta}{\partial n}=-\frac{\theta_a}{aZ_t}\left[(k_1^2-\lambda_2^2)(i\lambda_2 a-1)q_1-(k_1^2-\lambda_1^2)(i\lambda_1 a-1)q_2\right], \tag{34}$$

$$u_R(a)=\frac{\theta_a m}{aZ_t}\left[(i\lambda_1 a-1)q_2-(i\lambda_2 a-1)q_1\right], \tag{35}$$

де

$$q_1=4\mu(1-i\lambda_1 a-0,25k_2^2a^2)\ ,\ q_2=4\mu(1-i\lambda_2 a-0,25k_2^2a^2)\ ,$$

$$Z_t=(k_1^2-\lambda_1^2)q_2-(k_1^2-\lambda_2^2)q_1\ .$$

В свою чергу, система ГІР (15), (16) перетворюється на систему алгебраїчних рівнянь відносно невідомих $u_R(a)$ і $\frac{\partial\theta}{\partial n}$:

$$\begin{cases} A_{11}u_R(a)-B_{21}\dfrac{\partial\theta}{\partial n}=B_{11}\theta_a \\ \\ A_{12}u_R(a)-B_{22}\dfrac{\partial\theta}{\partial n}=B_{12}\theta_a\ , \end{cases} \tag{36}$$

де порівняно із коефіцієнтами системи (34) введені ще такі

$$A_{11}=\frac{1}{2}+\int\limits_{\Gamma_s}n_k\left(P\right)n_j\left(Q\right)T_{jk}\left(P,Q\right)d\Gamma\ ,\ \ A_{12}=\frac{i\omega\eta}{\gamma}\int\limits_{\Gamma_s}n_j\left(Q\right)T_{j4}\left(P,Q\right)d\Gamma\ .$$

Знову розв'язок системи (36), складеної на основі співвідношень методу ГІР, після деяких перетворень збігається із виразами (34), (35). Нормовані значення амплітуд граничних переміщень та нормальної похідної температури наведені на рис. 2. Позначки 1 і 2 відповідають дійсній та уявній частині $u_a^{norm}=\frac{u_R(a)}{a\theta_a m}\cdot 10^5$, тоді як позначки 3 і 4 – аналогічним частинам $\frac{\partial\theta^{norm}}{\partial n}=\frac{\partial\theta}{\partial n}\frac{a}{\theta_a}\cdot 10^{-4}$.

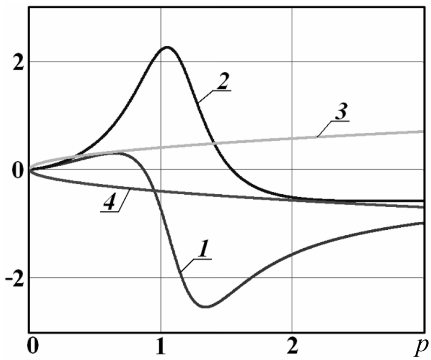

Рис. 2

Якщо ж на границі порожнини відсутні коливання температури, а амплітуди радіальних силових навантажень мають в усіх точках границі однакові значення, то розв'язок задачі згідно [2] має вигляд

$$\frac{\partial\theta}{\partial n}=\frac{t_R a}{mZ_t}(k_1^2-\lambda_2^2)(k_1^2-\lambda_1^2)(i\lambda_2 a-i\lambda_1 a)\,, \tag{37}$$

$$u_R(a)=\frac{t_R am}{Z_t}\Big[(k_1^2-\lambda_2^2)(i\lambda_1 a-1)-(k_1^2-\lambda_1^2)(i\lambda_2 a-1)\Big]\,, \tag{38}$$

а алгебраїчний аналог системи ГІР відносно невідомих $u_R(a)$ і $\frac{\partial\theta}{\partial n}$ набуває вигляду

$$\begin{cases} A_{11}u_R(a)-B_{21}\dfrac{\partial\theta}{\partial n}=-A_{21}t_R \\ \\ A_{12}u_R(a)-B_{22}\dfrac{\partial\theta}{\partial n}=-A_{22}t_R\,. \end{cases} \tag{39}$$

Результати розв’язання системи (39) шляхом алгебраїчних перетворень можуть бути приведені до вигляду (37), (38). На рис. 3 показані графіки нормованих величин

$$u_a^{norm}=\frac{u_R(a)}{a}\frac{\mu}{t_R}$$

(дійсній частині відповідає позначка 1, а уявній – 2) та

$$\frac{\partial\theta^{norm}}{\partial n}=\frac{\partial\theta}{\partial n}\frac{\mu m}{t_R}\cdot 10^{-5}$$

(позначки 3 і 4).

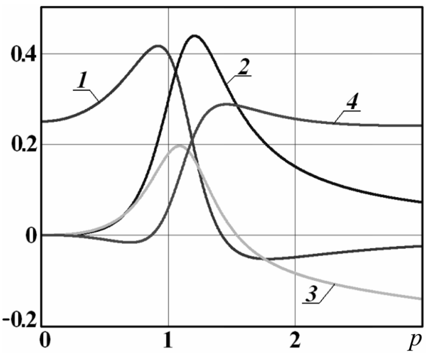

Рис. 3

Зазначимо, що при чисельних розрахунках радіус порожнини дорівнював 3 м, а фізико-механічні параметри матеріалу мали наступні значення $\mu=8\cdot 10^{10}$ *Па*, $\nu=0,25$, $\rho=7800\,кг/м^3$, $\alpha_t=1,5\cdot 10^{-4}\,град^{-1}$, $\lambda_0=30\,Вт/(м\cdot град)$, $\kappa=2\cdot 10^{-5}\,м^2/с$.

Висновки

Збіжність аналітичних розв’язків, отриманих двома різними способами, свідчить про коректність всіх проміжних і остаточних результатів застосування методу ГІР та про можливість їх використання під час розробки і всебічного тестування програмних засобів, призначених для чисельного аналізу за методом граничних елементів зв’язаних термопружних коливань тривимірних елементів конструкцій складної форми.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Новацкий В.* Динамические задачи термоупругости. М: Мир, 1970. – 256 с.
2. *Купрадзе В.Д. (общ. ред.).*Трехмерные задачи математической теории упругости и термоупругости. М: Наука, 1976. – 664 с.
3. *Tosaka N., Suh I.G.* Boundary element analysis of dynamic coupled thermoelasticity problems // Computational Mechanics. – 1991. V. 8. – P. 331-342
4. *Dargush G.F., Banergee P.K.,* Development of a boundary element method for time dependent planar thermoelasticity // Int. J. Solid Struct. – 1989. – No 25. - P. 999–1021.
5. *Tehrani P.H., Eslami M.R.* Two-dimensional time-harmonic dynamic coupled thermoelasticity analysis by boundary element method formulation // Engineering Analysis with Boundary Elements. – 1998. – V. 22. - No 3, - P. 245-250
6. *Sladek V., Sladek J.*, Boundary integral equation method in thermoelasticity. Part I: general analysis // Appl. Math. Modelling. – 1984. - No 7. – P. 241–253.
7. *Игумнов Л.А., Литвинчук С.Ю., Пазин В.П.* Применение метода граничных интегральных уравнений для анализа задач трехмерной динамической теории упругости // Проблемы прочности и пластичности. – 2010. – вып. 72. – С. 146-153

REFERENCES

1. *Nowacki W.* Dinamicheskiye zadachi termouprugosti (Dynamic problems of thermoelasticity) / Edited by G.S. Shapiro. – M: Mir, 1970. – 256 s.
2. *Kupradze V.D.* (obshh. red.).Trehmernye zadachi matematicheskoj teorii uprugosti i termouprugosti (Three-dimensional problems of the mathematical theory of elasticity and thermoelasticity). – M: Nauka, 1976. – 663 s..
3. *Tosaka N., Suh I.G.* Boundary element analysis of dynamic coupled thermoelasticity problems // Computational Mechanics. – 1991. V. 8. – P. 331-342
4. *Dargush G.F., Banergee P.K.,* Development of a boundary element method for time dependent planar thermoelasticity // Int. J. Solid Struct. – 1989. – No 25. - P. 999–1021.
5. *Tehrani P.H., Eslami M.R.* Two-dimensional time-harmonic dynamic coupled thermoelasticity analysis by boundary element method formulation // Engineering Analysis with Boundary Elements. – 1998. – V. 22. - No 3, - P. 245-250
6. *Sladek V., Sladek J.*, Boundary integral equation method in thermoelasticity. Part I: general analysis // Appl. Math. Modelling. – 1984. - No 7. – P. 241–253.
7. *Igumnov L.A., Litvinchuk S.Ju., Pazin V.P.* Primenenie metoda granichnyh integral'nyh uravnenij dlja analiza zadach trehmernoj dinamicheskoj teorii uprugosti (Using of Boundary Integral Equation Method for 3-D dynamic thermoelasticity problems analysis) // Problemy prochnosti i plastichnosti. – 2010. – vyp. 72. – S. 146-153

Vorona Yu.V., Kara I.D.

APPLICATION OF BOUNDARY INTEGRAL EQUATION METHOD FOR THERMOELASTICITY PROBLEMS

Boundary Integral Equation Method is used for solving analytically the problems of coupled thermoelastic spherical wave propagation. The resulting mathematical expressions coincide with the solutions obtained in a conventional manner.

Keywords: *fundamental solution, thermoelastic media, spherical waves.*

Ворона Ю.В., Кара И.Д.

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ГРАНИЧНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ДИНАМИЧЕСКИХ ЗАДАЧ ТЕРМОУПРУГОСТИ

Метод граничных интегральных уравнений применяется для решения в аналитической форме связанной задачи термоупругости про распространение сферических волн. Найденные замкнутые выражения полностью совпадают с решениями, полученными традиционным способом.

Ключевые слова: *фундаментальное решение, термоупругая среда, сферические волны.*

Автори

Кандидат технічних наук, доцент, професор кафедри будівельної механіки ВОРОНА Юрій Володимирович.
Адреса робоча: 03680 Україна, м. Київ, Повітрофлотський пр., 31, Київський національний університет будівництва і архітектури.
Роб. тел. + 38(044) 2454829
E-mail- yuvv@ukr.net

Аспірант кафедри будівельної механіки КАРА Ірина Дмитрівна.
Адреса робоча: 03680 Україна, м. Київ, Повітрофлотський пр., 31, Київський національний університет будівництва і архітектури.
Роб. тел. + 38(044) 2454829
E-mail- ikruska007@ukr.net