

УДК 539.3

РОЗВИТОК НАПІВНАЛІТИЧНОГО МЕТОДА СКІНЧЕННИХ ЕЛЕМЕНТІВ ДЛЯ РОЗРАХУНКУ ПРОСТОРОВИХ ТІЛ З КОНЦЕНТРАТОРАМИ НАПРУЖЕНЬ

О.О. Шкриль¹,
канд. техн. наук

¹Київський національний університет будівництва і архітектури
Повітрофлотський просп., 31, м. Київ. 03680

Показані особливості дискретизації кругових та призматичних тіл з концентраторами напружень у вигляді вирізів і тріщин на основі напіваналітичного метода скінченних елементів (НМСЕ). Розроблено новий скінченний елемент (СЕ) для моделювання тріщини. Ефективність розроблених підходів апробована на тестових задачах.

Ключові слова: тріщина, спеціальний скінченний елемент, напіваналітичний метод скінченних елементів.

Вступ. В роботах [2-5] наведені узагальнені розрахункові співвідношення для призматичного і кругового скінченних елементів НМСЕ без обмежень, що до розподілення механічних і геометричних параметрів. Як показали численні дослідження проведені на контрольних прикладах, вони дозволяють враховувати змінність механічних і геометричних характеристик об'єктів, як в напрямку утворюючої, так і в поперечних перетинах. В той же час є широке коло відповідальних конструктивних елементів які експлуатуються при наявності концентраторів напружень різної природи. Таким чином актуальною проблемою є розвиток зазначених підходів НМСЕ в напрямку їх урахування. В даній роботі пропонується підхід розв'язання цієї проблеми за рахунок відповідної корекції механічних характеристик.

1. Особливості дискретизації тіл з концентраторами напружень у вигляді вирізів на основі НМСЕ

В кругових та призматичних тілах контури вирізів можуть мати довільний характер (рис.1) Дискретизація таких тіл із застосуванні НМСЕ відбувається в межах поперечного перерізу, а в напрямку утворюючої застосовують один скінченний елемент (рис. 2).

Для опису напружено-деформованого стану в площині вирізу, вводиться система координат y^{in} (рис.3).

В точках інтегрування, що знаходяться в площині вирізу (рис. 4) жорсткість матеріалу СЕ вважається нульовою.

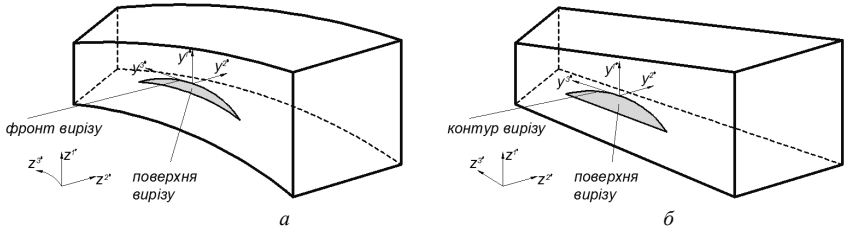


Рис. 1. Кругові та призматичні тіла з вирізами

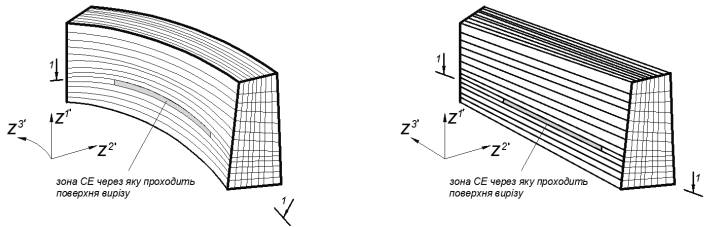


Рис. 2. Дискретизація кругових та призматичних тіл із вирізами

1-1

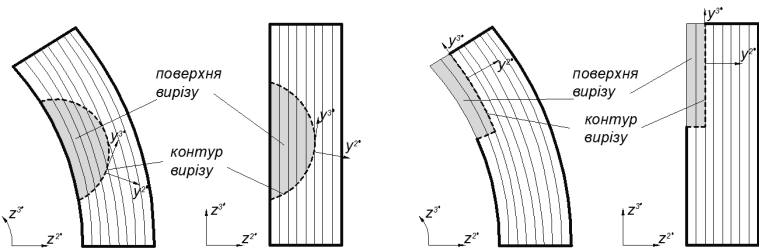


Рис. 3. Вигляд дискретних моделей в площині вирізу

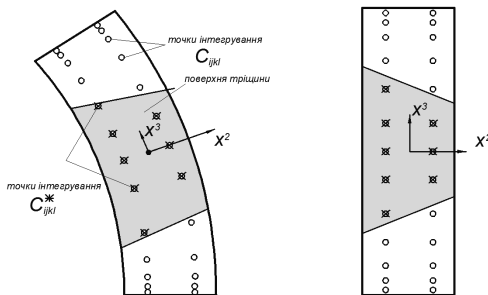


Рис. 4. Круговий та призматичний SE з вирізом

Для оцінки достовірності отримуваних результатів при використанні призматичних СЕ в призматичних тілах з вирізами, розв'язана задача про розтяг смуги, послабленої вирізами, форма яких описується радіусом дуги r (рис. 5). Розрахункові схеми НМСЕ та моментної схеми СЕ (МССЕ) представлені для чверті смуги (рис. 5). Отримані значення напружень при використанні НМСЕ відрізняються від відповідних результатів МССЕ в межах 2 %.

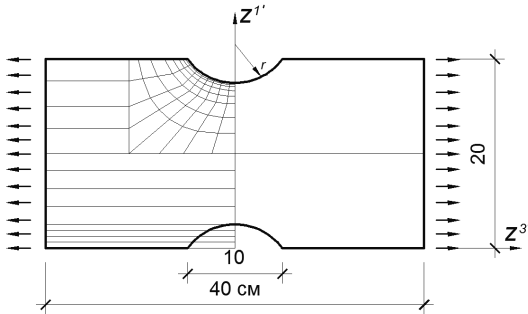


Рис. 5. Прямокутна смуга з дугоподібними вирізами

Ефективність використання кругових СЕ при моделюванні вирізів в кругових тілах була дослідженою на задачі про пружно-пластичне деформування товстостінного циліндру з вирізами під дією зовнішнього тиску (рис. 6,а). Для розв'язання задач пружно-пластичності був застосований алгоритм ефективність якого доведена в [1]. Інтенсивність тиску змінюється в межах $q = 0.441 - 0.971\tau_s$. Матеріал циліндра – ідеально пружно-пластичний. Межа текучості при чистому зсуві $\tau_s = 1.7 \cdot 10^2$ МПа. Весь інтервал завантаження був розбитий на 5 ділянок: $q = 0.441\tau_s; 0.661\tau_s; 0.794\tau_s; 0.926\tau_s; 0.971\tau_s$. Границі зон пластичної роботи матеріалу для зазначених навантажень показані на рис.6б суцільними лініями (при застосуванні МССЕ), та кружками (при використанні НМСЕ).

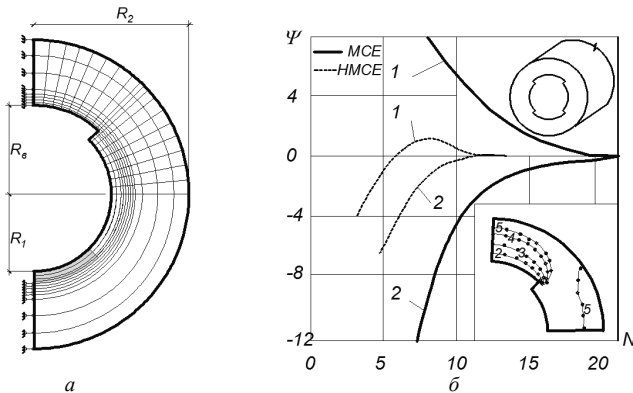


Рис. 6. Товстостінний циліндр з вирізами

На рис. 6,б можна побачити, що збіжність НМСЕ при різних рівнях пластичних деформацій є кращою ніж в МССЕ.

2. Особливості дискретизації просторових тіл при наявності вирізів типу тріщин

Розглянемо спеціальні кільцевий замкнений та призматичний скінченні елементи з тріщинами з поперечним перерізом у вигляді криволінійного чотирикутника довільного обрису (рис. 7,а).

Введемо ортогональну систему координат $y^{i''}$ (7) таким чином, щоб $y^{2''}$ проходила по дотичній до траєкторії тріщини, а $y^{1''}$ - по нормалі і утворювала з додатнім напрямком осі $Z^{1'}$ кут φ .

Будемо вважати, що область, яку займає елемент, відображається на квадрат з одиничними сторонами, внутрішні властивості якого визначаються механічними і геометричними характеристиками елемента (рис. 7,б).

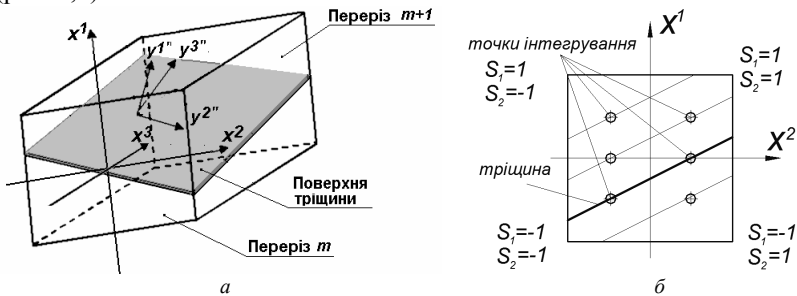


Рис. 7. Спеціальний СЕ з тріщиною

Помістимо в центр елемента початок системи координат x^i , направляючи осі вздовж сторін. За невідомі обрані вузлові переміщення, в базисній системі координат $Z^{i'}$, де індекси s_1 та s_2 визначають положення вузла відносно центра елемента і набувають значень ± 1 . Вважається, що на берегах тріщини нормальні та дотичні напруження повинні дорівнювати нулю:

$$\sigma^{1''1''} = 0, \sigma^{1''2''} = 0, \sigma^{1''3''} = 0. \quad (1)$$

Використаємо подання тензора пружних сталей через коефіцієнти Ляме і компоненти метричного тензора для анізотропного матеріалу:

$$d^{ijkl} = \lambda g^{ij} g^{kl} + \mu (g^{jl} g^{ik} + g^{il} g^{jk}). \quad (2)$$

Оскільки для ортогональної системи координат $y^{i''}$:

$$g^{i''j''} = 0 \text{ при } i'' \neq j'', \quad g^{i''i''} \neq 0, \quad (3)$$

на основі закону Гука представимо напруження через деформації:

$$\begin{aligned} \sigma^{1''1''} &= d^{1''1''1''1''} \varepsilon_{1''1''} + d^{1''1''2''2''} \varepsilon_{2''2''} + d^{1''1''3''3''} \varepsilon_{3''3''} = 0, \\ \sigma^{1''2''} &= 2d^{1''2''1''2''} \varepsilon_{1''2''} = 0, \\ \sigma^{1''3''} &= 2d^{1''3''1''3''} \varepsilon_{1''3''} = 0. \end{aligned} \quad (4)$$

Зв'язок між напруженнями та деформаціями в системі координат y^i представимо наступним чином:

$$\sigma^{i''j''} = d^{i''j''k''l''} \varepsilon_{k''l''}, \quad (5)$$

де

$$d_*^{i''j''k''l''} = d^{i''j''k''l''} - d_p^{i''j''k''l''} - d_c^{i''j''k''l''} - d_q^{i''j''k''l''}, \quad (6)$$

$$d_p^{i''j''k''l''} = d^{i''j''1''1''} d^{1''1''k''l''} / d^{1''1''1''1''}, \quad (7)$$

$$d_c^{i''j''k''l''} = 2d^{i''j''1''2''}, \quad (8)$$

$$d_q^{i''j''k''l''} = 2d^{i''j''1''3''}. \quad (9)$$

Тут $d_p^{i''j''k''l''}$ - доданок, обумовлений відсутністю напружень $\sigma^{1''1''}$, $d_c^{i''j''k''l''}$ - напружень $\sigma^{1''2''}$, $d_q^{i''j''k''l''}$ - напружень $\sigma^{1''3''}$.

Виконавши відповідні перетворення, формулу (5) можна подати в місцевій криволінійній системі координат x^j :

$$\sigma^{mn} = d_*^{mnst} \varepsilon_{st}. \quad (10)$$

Корекція тензора пружних констант матеріалу d^{mnst} в зоні тріщини проводиться згідно формули:

$$d_*^{mnst} = d^{mnst} - d_p^{mnst} - d_c^{mnst} - d_q^{mnst}. \quad (11)$$

Вирази для їх обчислення, у відповідності до відомих формул тензорного аналізу [6], мають вигляд:

$$d_p^{mnst} = C_{i''}^m C_{j''}^n C_{k''}^s C_{l''}^t d^{i''j''1''1''} d^{1''1''k''l''} / d^{1''1''1''1''}, \quad (12)$$

$$d_c^{mnst} = 2C_{i''}^m C_{j''}^n C_{1''}^s C_{2''}^t d^{i''j''1''2''}, \quad (13)$$

$$d_q^{mnst} = 2C_{i''}^m C_{j''}^n C_{1''}^s C_{3''}^t d^{i''j''1''3''}, \quad (14)$$

де $C_{i''}^m$ - коефіцієнти перетворення, що визначають зв'язок між системою координат x^j та системою координат y^α :

$$C_{i''}^m = C_k^m C_i^{k'}, \quad C_i^{k'} = \cos(Z^{k'} \wedge y^{i''}). \quad (15)$$

Проведемо перетворення величин, що входять до (12)-(14) у відповідності до (1) та (2):

$$d_p^{mnst} = \frac{2\mu}{1 + \frac{\lambda}{2\mu}} S^{mn} S^{st}, \quad S^{mn} = \frac{\lambda}{2\mu} g^{mn} + C_1^m C_1^n, \quad (16)$$

$$d_c^{mnst} = 2\mu(C_2^m C_1^n C_1^s C_2^t + C_1^m C_2^n C_1^s C_2^t), \quad (17)$$

$$d_q^{mnst} = 2\mu(C_3^m C_1^n C_1^s C_3^t + C_1^m C_3^n C_1^s C_3^t). \quad (18)$$

Якщо симетризувати вирази (17) та (18) і ввести позначення $r_{i''}^{ms} = C_{(i'')}^m C_{(i'')}^s$, можемо записати:

$$d_c^{mnst} = \mu(r_1^{ns} r_2^{mt} + r_1^{ms} r_2^{nt} + r_1^{nt} r_2^{ms} + r_1^{mt} r_2^{ns}), \quad (19)$$

$$d_q^{mnst} = \mu(r_1^{ns} r_3^{mt} + r_1^{ms} r_3^{nt} + r_1^{nt} r_3^{ms} + r_1^{mt} r_3^{ns}). \quad (20)$$

Запропоновані елементи орієнтуються на розрахунок неоднорідних просторових конструкцій. Оскільки в даному СЕ не накладається будь-яких обмежень на діапазони зміни модуля пружності, при $E \rightarrow 0$ з'являється можливість моделювання тіл обертання з вирізами, що порушують суцільність матеріалу.

Дослідження впливу використання спеціальних СЕ на точність обчислення параметрів НДС проведено на прикладі розтягу квадратної пластини з центральною тріщиною. Внаслідок наявності двох осей симетрії, дискретна модель складена для чверті пластини (рис. 8). Моделювання тріщини відбувається за допомогою задання відповідних граничних умов (рис. 8,а), або за допомогою розроблених спеціальних СЕ (затемнені на рис. 8,б).

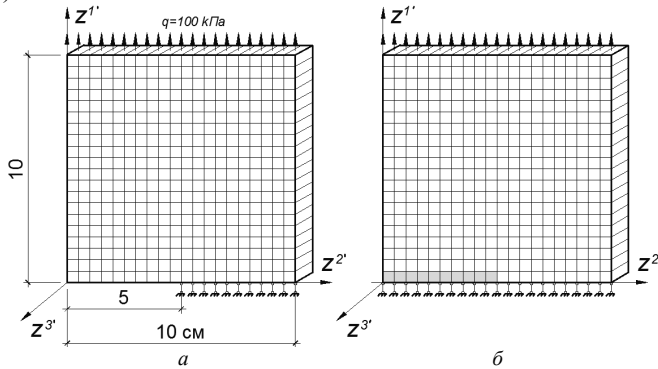
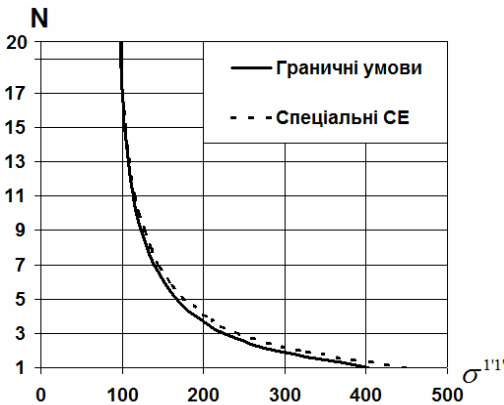


Рис. 8. Моделювання тріщини в пластині за допомогою граничних умов (а), або спеціальних СЕ (б)

Розподіл напружень в центрі пластини вздовж 20 елементів розташованих над вершиною тріщини показаний на рис. 9.



Результати показують, що використання спеціальних СЕ з тріщиною в межах НМСЕ, дозволяє отримувати розподіл НДС близький варіанту моделювання тріщини за допомогою граничних умов (рис. 9).

Наведені співвідношення які визначають зв'язок між переміщеннями і деформаціями а також між деформаціями і напруженнями в рамках

Рис. 9. Розподіл напружень над вершиною тріщини

моментної схеми СЕ дозволяють отримувати розв'язувальні співвідношення НМСЕ для різних модифікацій призматичного СЕ з перемінними геометричними і механічними параметрами.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Баженов В.А., Гуляр О.І., Пискунов С.О., Сахаров О.С.* Напіваналітичний метод скінченних елементів в задачах руйнування просторових тіл: Монографія – К.: КНУБА, 2005. – 298 с.
2. *Баженов В.А., Гуляр О.І., Сахаров О.С., Шкриль О.О.* Основні положення моментної схеми для напіваналітичного варіанта призматичного скінченного елемента // Опір матеріалів і теорія споруд: наук.-техн. збірник. - К. КНУБА, 2013.- № 91, – С.3-12.
3. *Гуляр О.І., Пискунов С.О., Шкриль О.О.* Призматичний скінченний елемент на основі моментної схеми скінченних елементів. // Опір матеріалів і теорія споруд: наук.-техн. збірник. - К. КНУБА, 2013.- № 93, – С.22-29.
4. *Пискунов С.О., Шкриль О.О., Романцова К.С.* Моментна схема МСЕ для кругового скінченного елемента // Опір матеріалів і теорія споруд: наук.-техн. збірник. - К. КНУБА, 2015.- № 94, – С.107-118.
5. *Гуляр О.І., Пискунов С.О., Шкриль О.О., Романцова К.С.* Матриця жорсткості і вектор вузлових реакцій кругового скінченного елемента з чисельним інтегруванням// Опір матеріалів і теорія споруд: наук.-техн. збірник. - К. КНУБА, 2015.- № 95, – С.81-90.
6. *Блох В.И.* Теория упругости. – Харьков: Изд-во ХГУ, 1964. – 483 с.

REFERENCES

1. *Bazhenov V.A., Gulyar O.I., Piskunov S.O., Sakharov O.S.* Napivanalitichniy metod skinchennikh elementiv v zadachakh ruynuvannya prostorovikh til: Monografiya – K.: KNUBA, 2005. – 298 s.

2. *Bazhenov V.A., Gulyar O.I., Sakharov O.S., Shkriil' O.O.* Osnovni polozhennya momentnoi skhemi dlya napivanalitichnogo varianta prizmatichnogo skinchennogo elementa // *Opir materialiv i teoriya sporud: nauk.-tekhn. zbirnik.* - K. KNUBA, 2013.- № 91., – S.3-12.
3. *Gulyar O.I., Piskunov S.O., Shkriil' O.O.* Prizmatichniy skinchenniy element na osnovi momentnoi skhemi skinchennikh elementiv. // *Opir materialiv i teoriya sporud: nauk.-tekhn. zbirnik.* - K. KNUBA, 2013.- № 93., – S.22-29.
4. *Piskunov S.O., Shkriil' O.O., Romantsova K.S.* Momentna skhema MSE dlya krugovogo skinchennogo elementa // *Opir materialiv i teoriya sporud: nauk.-tekhn. zbirnik.* - K. KNUBA, 2015.- № 94., – S.107-118.
5. *Gulyar O.I., Piskunov S.O., Shkriil' O.O., Romantsova K.S.* Matritsya zhorstkosti i vektor vuzlovikh reaktsiy krugovogo skinchennogo elementa z chisel'nim integruvannyam// *Opir materialiv i teoriya sporud: nauk.-tekhn. zbirnik.* - K. KNUBA, 2015.- № 95., – S.81-90.
6. *Blokh V.I.* Teoriya uprugosti. – Khar'kov: Izd-vo KhGU, 1964. – 483 s.

Shkriil' O.

DEVELOPMENT OF SEMI-ANALYTICAL FINITE ELEMENT METHOD TO CALCULATE THE THREE-DIMENSIONAL BODIES WITH STRESS CONCENTRATORS

The features of the sampling circular and prismatic bodies with stress concentrators in the form of cuts and cracks on the basis of semi-analytical finite element method (SFEM). A new finite element (FE) modeling for the crack. The effectiveness of the developed approaches tested in the test problems..

Keywords: crack, special finite element, semi-analytical finite element method

Шкрыль А.А.

РАЗВИТИЕ ПОЛУАНАЛИТИЧЕСКОГО МЕТОДА КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ДЛЯ РАССЧЕТА ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ТЕЛ С КОНЦЕНТРАТОРАМИ НАПРЯЖЕНИЙ

Показаны особенности дискретизации круговых и призматических тел с концентраторами напряжений в виде вырезов и трещин на основе полуаналитического метода конечных элементов (ПМКЭ). Разработан новый конечный элемент (КЭ) для моделирования трещины. Эффективность разработанных подходов апробирована на тестовых задачах.

Ключевые слова: трещина, специальный конечный элемент, полуаналитический метод конечных элементов

Автор (вчена ступень, вчене звання, посада): доцент, кандидат технічних наук, докторант кафедри будівельної механіки КНУБА Шкрыль Олексій Олександрович.

Адреса робоча: 03680 Україна, м. Київ, Повітрофлотський проспект 31, Київський національний університет будівництва і архітектури, кафедра будівельної механіки, Шкрылю Олексію Олександровичу.

Адреса домашня: 08132, Україна, м. Вишневе, вул. Щорса 10, кв. 24

Роб. тел. +38(044) 245-55-55;

мобільний тел.: +38(050) 307-61-49.

E-mail – alexniism@ukr.net