УДК 539.3

СКІНЧЕНИЙ ЕЛЕМЕНТ ЗАГАЛЬНОГО ТИПУ ДЛЯ РОЗВ'ЯЗКУ ВІСЕСИМЕТРИЧНОЇ ЗАДАЧІ НЕСТАЦІОНАРНОЇ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ

Ю.В. Максим'юк[1]
канд. техн. наук, доцент кафедри будівельної механіки

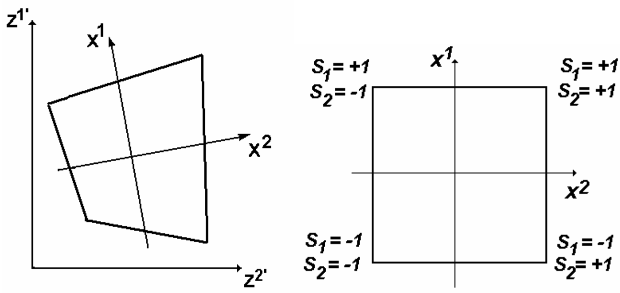
[1] *Київський національний університет будівництва і архітектури, Київ*

В роботі отримані розрахункові співвідношення скінченого елемента (СЕ) загального типу з чисельним інтегруванням для вісесиметричної задачі нестаціонарної теплопровідності з урахуванням змінності теплофізичних констант в його площині. На основі порівняння двох типів СЕ з'ясовано, що при рівномірному розподіленні теплофізичних констант і відсутності суттєво косокутних СЕ в межах об'єкту збіжність результатів отриманих на їх основі практично тотожна.

Ключові слова: чисельне інтегрування, СЕ загального типу, розв'язувальні співвідношення, метод скінчених елементів (МСЕ), нестаціонарна теплопровідність, вісесиметричні тіла, криволінійна система координат.

Вступ. В роботі [2] розглянуто алгоритм розв'язання вісесиметричної задачі нестаціонарної теплопровідності на основі СЕ, розрахункові співвідношення якого отримані з використанням наступних гіпотез відносно розподілення теплофізичних констант в межах його площини: передбачалось, що λ - коефіцієнт теплопровідності; T - температура в точці тіла, що розглядається; C - питома об'ємна теплоємність матеріалу не змінюються в межах площини скінченого елемента і дорівнюють їх значенням в центрі елемента. Для обгрунтування області ефективного використання такого елементу з усередненими теплофізичними характеристиками необхідно провести дослідження збіжності результатів шляхом порівняння із результатами розв'язку нестаціонарної задачі теплопровідності при використанні СЕ без введення спрощувальних гіпотез. Тому отримання розрахункових співвідношень нестаціонарної теплопровідності загального типу є актуальною проблемою розв'язку нестаціонарної задачі теплопровідності на основі методу скінчених елементів (МСЕ).

1. Вісесиметричний та плоский скінченні елементи загального типу. Для вісесимеричних та плоско-деформованих тіл на основі МСЕ використовуються скінченні елементи (СЕ), що являють собою чотирикутники довільної форми (рис. 1,*а*).



а *б*

Рис. 1.

Кожному СЕ у відповідність поставлена місцева криволінійна система координат x^i, так що осі x^1 і x^2 спрямовані вздовж сторін поперечного перетину СЕ. При цьому в місцевій системі координат поперечний перетин СЕ відображається на квадрат з одиничною стороною (рис. 1,*б*). Місцева система координат застосовується для визначення деформацій та напружень у межах СЕ.

Розглянемо скінченні елементи загального вигляду, в яких не накладається ніяких обмежень на характер розподілення теплофізичних та геометричних параметрів по площі поперечного перерізу СЕ і вони обчислюються в деякій кількості точок інтегрування (рис. 2).

Як і в роботі [1] температурне поле неоднорідного тіла обертання, меридіональний переріз якого має площу S і обмежений контуром L, описується рівнянням нестаціонарної теплопровідності [4]:

$$div(\lambda_{(x^1x^2)}\nabla T) = C_{(x^1x^2)}\frac{\partial T}{\partial t}, \quad (1)$$

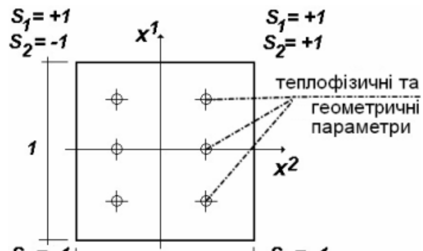


Рис. 2

де $\lambda_{(x^1x^2)}$ - коефіцієнт теплопровідності; T - температура в точці тіла, що розглядається; $C_{(x^1x^2)}$ - питома об’ємна теплоємність матеріалу.

В криволінійній системі координат x^α [2] покомпонентна форма диференційного рівняння (1) приймає вигляд [1]:

$$\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\left(\lambda_{(x^1x^2)}g^{\alpha\beta}_{(x^1x^2)}\sqrt{g}\,\frac{\partial T}{\partial x^\beta}\right) = C_{(x^1x^2)}\frac{\partial T}{\partial t}. \quad (2)$$

Однозначність розв’язання рівняння (2) забезпечується введенням відповідних початкових та граничних умов. В якості початкових умов приймається відоме розподілення температури в тілі в деякий фіксований момент часу t_0, що приймається за початок часової координати.

$$T(x^{\alpha}, t_0) = T_0\,(x^{\alpha}),\;\; x^{\alpha} \in L, \tag{3}$$

де $T_0\,(x^{\alpha})$ - задана функція координат.

Граничні умови в теорії теплопровідності формулюються в вигляді двох ідеалізованих типів теплопередачі на границі тіла:

1. Відомі зміни з часом температури точок поверхні тіла

$$T(x^{\alpha}, t) = f\,(x^{\alpha}, t),\;\; x^{\alpha} \in L_1, \tag{4}$$

де $f\,(x^{\alpha}, t)$ - задана функція; L_1 - частина поверхні тіла S, на якій задані граничні умови першого роду.

2. Відома температура зовнішнього середовища θ і закон конвекційного теплообміну між поверхнею тіла і зовнішнім середовищем

$$-\lambda_{(x^1x^2)} \frac{\partial T\,(x^{\alpha}, t)}{\partial n} = \alpha_{(x^1x^2)} \left[T\,(x^{\alpha}, t) - \theta\,(x^{\alpha}, t)\right],\;\; x^{\alpha} \in L_2, \tag{5}$$

де α - коефіцієнт тепловіддачі; L_2 - частина поверхні тіла S, на якій задані граничні умови третього роду.

Рівняння (2) з початковими (3) і граничними (4)-(5) умовами однозначно визначає нестаціонарне температурне поле в тілі, властивості якого в загальному випадку залежать від просторових координат і температури.

Диференційне рівняння (2) з граничними умовами (4)-(5) еквівалентне варіаційному рівнянню вісесиметричної задачі нестаціонарної теплопровідності [3]:

$$\delta\chi = \int_S (\lambda_{(x^1x^2)} \frac{\partial T}{\partial x^{\alpha}} \frac{\partial \delta T}{\partial x^{\beta}} g^{\alpha\beta}_{(x^1x^2)}) \sqrt{g_{(x^1x^2)}}\, dL +$$

$$+ \int_L \alpha (T-\theta)_{(x^1x^2)}\, \delta T dL - \int_S C_{(x^1x^2)} \frac{\partial T}{\partial t} \delta T \sqrt{g_{(x^1x^2)}}\, dL. \tag{6}$$

Тут і в подальшому всі індекси, позначені грецькими буквами, будуть приймати значення 1,2, а позначені латинськими – 1,2,3.

Розподілення температури у межах СЕ описується білінійним законом:

$$T = \sum_{S_1=\pm 1} \sum_{S_2=\pm 1} T_{(S_1S_2)} \left(\frac{1}{2} S_1 x^1 + \frac{1}{2} S_2 x^2 + S_1 S_2 x^1 x^2 + \frac{1}{4} \right), \tag{7}$$

де $T_{(S_1S_2)}$ – вузлові значення температури.

Для СЕ, які примикають до границь області, розподілення температури вздовж координатної лінії визначаються формулою:

$$T = \sum_{S_1=\pm 1} \sum_{S_2=\pm 1} T_{(S_1 S_2)} \left(\frac{1}{2} + S_{(3-\alpha)} x^{(3-\alpha)} \right).$$

Вирази для похідних від температури і часу мають вигляд:

$$T,_{\alpha} = \sum_{S_1=\pm 1} \sum_{S_2=\pm 1} T_{(S_1 S_2)} \left(\frac{1}{2} + S_{(3-\alpha)} x^{(3-\alpha)} \right) S_{\alpha} \; . \qquad (8)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \sum_{S_1=\pm 1} \sum_{S_2=\pm 1} \frac{T_{(S_1 S_2)}}{\partial t} \left(\frac{1}{2} S_1 x^1 + \frac{1}{2} S_2 x^2 + S_1 S_2 x^1 x^2 + \frac{1}{4} \right).$$

При скінченноелеметній апроксимації досліджуваного об’єкта для системи з N СЕ зазначене рівняння (2) набуває вигляду:

$$\delta\chi = \sum_{n=1}^{N} \delta\chi_n = \sum_{n=1}^{N} \int\limits_{x^1=-1/2}^{x^1=1/2} \int\limits_{x^2=-1/2}^{x^2=1/2} \lambda_{(x^1x^2)} \left(\frac{\partial T}{\partial x^{\alpha}} \frac{\partial \delta T}{\partial x^{\beta}} g^{\alpha\beta}_{(x^1x^2)} \right) \sqrt{g_{(x^1x^2)}} dx^1 dx^2 +$$

$$+ \int\limits_{x^1=-1/2}^{x^1=1/2} \int\limits_{x^2=-1/2}^{x^2=1/2} \alpha_{(x^1x^2)} T \delta T \sqrt{g_{(x^1x^2)}} dx^1 dx^2 - \int\limits_{L} \alpha_{(x^1x^2)} \theta \delta T \sqrt{g_{(x^1x^2)}} dL -$$

$$- \int\limits_{x^1=-1/2}^{x^1=1/2} \int\limits_{x^2=-1/2}^{x^2=1/2} C_{(x^1x^2)} \frac{\partial T}{\partial t} \delta T \sqrt{g_{(x^1x^2)}} dx^1 dx^2 = 0. \qquad (9)$$

Після підстановки в (3) значень температури (4) та її похідних (5) отримаємо:

$$\delta\chi_n = \int\limits_{x^1=-1/2}^{x^1=1/2} \int\limits_{x^2=-1/2}^{x^2=1/2} \lambda_{(x^1x^2)} \left[\sum_{S_1=\pm 1} \sum_{S_2 \pm 1} \left(T_{(S_1 S_2)} \left(\frac{1}{2} + S_{(3-\alpha)} x^{(3-\alpha)} \right) S_{\alpha} \right) \times \right.$$

$$\left. \times \sum_{P_1=\pm 1} \sum_{P_2=\pm 1} \left(\delta T_{(P_1 P_2)} \left(\frac{1}{2} + P_{(3-\beta)} x^{(3-\beta)} \right) P_{\beta} \right) g^{\alpha\beta}_{(x^1x^2)} \right] \sqrt{g} dx^1 dx^2 +$$

$$+ \int\limits_{x^1=-1/2}^{x^1=1/2} \int\limits_{x^2=-1/2}^{x^2=1/2} \alpha_{(x^1x^2)} \left[\sum_{S_1=\pm 1} \sum_{S_2=\pm 1} T_{(S_1 S_2)} \left(\frac{1}{2} + S_{(3-\alpha)} x^{(3-\alpha)} \right) \times \right.$$

$$\left. \times \sum_{P_1=\pm 1} \sum_{P_2=\pm 1} \left(\delta T_{(P_1 P_2)} \left(\frac{1}{2} + P_{(3-\alpha)} x^{(3-\alpha)} \right) \right) \right] \sqrt{g_{(x^1x^2)}} dx^1 dx^2 -$$

$$-\int_L \alpha_{(x^1x^2)}\theta\delta T\sqrt{g_{(x^1x^2)}}dL-$$

$$-\int\limits_{x^1=-1/2}^{x^1=1/2}\int\limits_{x^2=-1/2}^{x^2=1/2} C_{(x^1x^2)}\left[\sum_{S_1=\pm1}\sum_{S_2=\pm1}\frac{T_{(S_1S_2)}}{\partial t}\left(\frac{1}{2}S_1x^1+\frac{1}{2}S_2x^2+S_1S_2x^1x^2+\frac{1}{4}\right)\times\right.$$

$$\left.\times\sum_{P_1=\pm1}\sum_{P_2=\pm1}\delta T_{(P_1P_2)}\left(\frac{1}{2}P_1x^1+\frac{1}{2}P_2x^2+P_1P_2x^1x^2+\frac{1}{4}\right)\right]\sqrt{g_{(x^1x^2)}}dx^1dx^2 \quad (10)$$

Визначення інтегралів по x^1 та x^2 в загальному випадку може бути обчислене тільки на основі процедур чисельного інтегрування.

Тоді вираз (10) може бути поданий у вигляді:

$$\delta\chi_n=\sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J}\left[\lambda_{(x^1x^2)}\sum_{S_1=\pm1}\sum_{S_2\pm1}\left(T_{(S_1S_2)}\left(\frac{1}{2}+S_{(3-\alpha)}x^{(3-\alpha)}\right)S_\alpha\right)\times\right.$$

$$\left.\times\sum_{P_1=\pm1}\sum_{P_2=\pm1}\left(\delta T_{(P_1P_2)}\left(\frac{1}{2}+P_{(3-\beta)}x^{(3-\beta)}\right)P_\beta\right)g^{\alpha\beta}_{(x^1x^2)}\sqrt{g_{(x^1x^2)}}H_iH_j\right]_{x_i^1,x_j^2}+$$

$$+\sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J}\left[\alpha_{(x^1x^2)}\sum_{S_1=\pm1}\sum_{S_2=\pm1}T_{(S_1S_2)}\left(\frac{1}{2}+S_{(3-\alpha)}x^{(3-\alpha)}\right)\times\right.$$

$$\left.\times\sum_{P_1=\pm1}\sum_{P_2=\pm1}\left(\delta T_{(P_1P_2)}\left(\frac{1}{2}+P_{(3-\alpha)}x^{(3-\alpha)}\right)\right)\sqrt{g_{(x^1x^2)}}H_iH_j\right]_{x_i^1,x_j^2}-$$

$$-\int_L \alpha_{(x^1x^2)}\theta\delta T\sqrt{g_{(x^1x^2)}}dL-$$

$$-\sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J}\left[C_{(x^1x^2)}\sum_{S_1=\pm1}\sum_{S_2=\pm1}\frac{T_{(S_1S_2)}}{\partial t}\left(\frac{1}{2}S_1x^1+\frac{1}{2}S_2x^2+S_1S_2x^1x^2+\frac{1}{4}\right)\times\right.$$

$$\left.\times\sum_{P_1=\pm1}\sum_{P_2=\pm1}\delta T_{(P_1P_2)}\left(\frac{1}{2}P_1x^1+\frac{1}{2}P_2x^2+P_1P_2x^1x^2+\frac{1}{4}\right)\sqrt{g_{(x^1x^2)}}H_iH_j\right]_{x_i^1,x_j^2}. \quad (11)$$

Позначимо

$$R_{(S_1,S_2,P_1,P_2)}=\sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J}\left[\lambda_{(x^1x^2)}\left(\frac{1}{2}+S_{(3-\alpha)}x^{(3-\alpha)}\right)S_\alpha\times\right.$$

$$\times \sum_{P_1=\pm 1} \sum_{P_2=\pm 1} \delta T_{(P_1 P_2)} \left(\frac{1}{2} P_1 x^1 + \frac{1}{2} P_2 x^2 + P_1 P_2 x^1 x^2 + \frac{1}{4} \right) \sqrt{g_{(x^1 x^2)}} H_i H_j \Bigg]_{x_i^1, x_j^2} \quad (12)$$

- коефіцієнти матриці теплопровідності;

$$B_{(S\alpha, P\alpha)} = \sum_{i=1}^{I} \sum_{j=1}^{J} \Bigg[\alpha_{(x^1 x^2)} \sum_{S_1=\pm 1} \sum_{S_2=\pm 1} T_{(S_1 S_2)} \left(\frac{1}{2} + S_{(3-\alpha)} x^{(3-\alpha)} \right) \times$$

$$\times \sum_{P_1=\pm 1} \sum_{P_2=\pm 1} \left(\delta T_{(P_1 P_2)} \left(\frac{1}{2} + P_{(3-\alpha)} x^{(3-\alpha)} \right) \right) \sqrt{g_{(x^1 x^2)}} H_i H_j \Bigg]_{x_i^1, x_j^2} \quad (13)$$

- добавка до коефіцієнтів матриці теплопровідності на границі області, що співпадають з координатною лінією x^{α} $(\alpha = 1, 2)$;

$$C_{(S\alpha, P\alpha)} = \sum_{i=1}^{I} \sum_{j=1}^{J} \Bigg[C_{(x^1 x^2)} \sum_{S_1=\pm 1} \sum_{S_2=\pm 1} \frac{T_{(S_1 S_2)}}{\partial t} \left(\frac{1}{2} S_1 x^1 + \frac{1}{2} S_2 x^2 + S_1 S_2 x^1 x^2 + \frac{1}{4} \right) \times$$

$$\times \sum_{P_1=\pm 1} \sum_{P_2=\pm 1} \delta T_{(P_1 P_2)} \left(\frac{1}{2} P_1 x^1 + \frac{1}{2} P_2 x^2 + P_1 P_2 x^1 x^2 + \frac{1}{4} \right) \sqrt{g_{(x^1 x^2)}} H_i H_j \Bigg]_{x_i^1, x_j^2} \quad (14)$$

- коефіцієнти матриці теплоємності.

Інтеграл $\{Q_0\}$, що містить θ, визначається чисельно тільки на контурі тіла і при формуванні системи рівнянь переноситься в праву частину.

В силу довільності варіації $\delta T_{(P_1 P_2)}$ рівняння (11) еквівалентне системі звичайних диференційних рівнянь

$$\sum_{n=1}^{N} \left([R] + [B] - [C] \{T\}_{,t} \right) = \sum_{l=1}^{L} \{Q_0\}, \quad (15)$$

де коефіцієнти матриць $[R]$, $[B]$, $[C]$ визначаються за формулами (12-14).

Для розв'язання системи диференційних рівнянь (15) приймається метод скінченних різниць. Вздовж часової координати t вибирається скінченна множина N точок t_n $(n = 0, 1, ..., N)$ з кроком Δt_n таким чином, щоб $t_n \big|_{n=0} = t_н$; $t_n \big|_{n=N} = t_к$. Замінюючи похідну за часом в (15) скінченно-різнечевим алгоритмом другого порядку точності за схемою Кранка-Ніколсона [5] і приймаючи в якості невідомих значення температури в вузлах сіткової області в момент часу t_{n+1}, маємо систему алгебраїчних рівнянь відносно $T^{n+1}_{(S_1,S_2)}$ в матричному вигляді

$$[C]\{T\}_{n+1}+([R]+[B])\{T\}_{n+1}=[C]\{T\}_n-([R]+[B])\{T\}_n+\{Q_0\}_n, \quad (16)$$

2. Чисельні результати

На першому етапі було проведено порівняння збіжності двох типів СЕ на основі розв'язку контрольних прикладів розглянутих в роботі [2]. З'ясувалось, що при постійних в межах площини об'єкту теплофізичних характеристик збіжність обох типів СЕ практично однакова.

На другому етапі для ілюстрації застосування розроблених підходів виконано розрахунок зміни температурних полів ротора парової турбіни в режимі запуску. Ротор представляє собою вісесиметричне тіло, утворене набором масових дисків, валів і перемичок різної форми перерізу. Ротор находиться в умовах нерівномірного нагріву. Через зовнішню поверхню проходить теплообмін з зовнішнім середовищем у відповідності з законом Ньютона. Температура середовища $\theta = 500^\circ\mathrm{C}$. В початковий момент часу $t_0 = 0$ температура ротора дорівнює $20^\circ\mathrm{C}$. Дискретна модель МСЕ для перерізу ротора показана на рис. 3.

На рис. 3. приведені результати розв'язання задачі теплопровідності у вигляді графиків розподілення температур в моменти часу $t = 300\ с,\ 4200\ с, 6900\ с$.

При розрахунку прийняті такі механічні і теплофізичні характеристики: модуль пружності *E*=206010 *МПа*, коефіцієнт Пуасона $\nu = 0.3$, коефіцієнт лінійного розширення $\beta_T = 12.2\cdot 10^{-6}\ град^{-1}$, коефіцієнт тепловіддачі α_T=250 *Вт*/(*м*²·°С), коефіцієнт теплопровідності λ_T=30 *Вт*/(*м*·°С), питома теплоємність *C*=0.15 *Дж/кг*·°С.

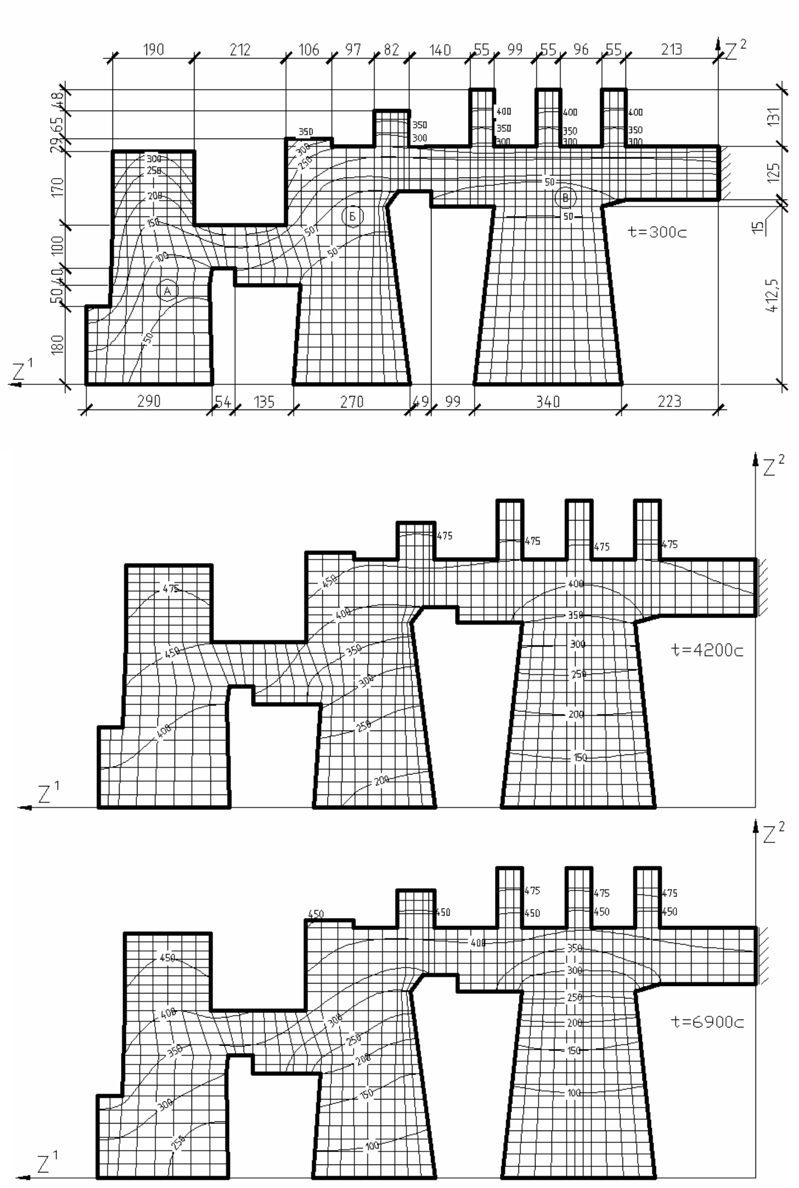

190
212
106
97
82
140
55
99
55
96
55
213
Z2
131
125
15
412,5
48
65
29
170
100
40
50
180
Z1
290
54
135
270
49
99
340
223
А
Б
В
t=300c
t=4200c
t=6900c
Z1
Z2

Рис. 3

Висновок. Проведені дослідження дозволили встановити область використання розробленого в роботі [2] варіанту СЕ, який дозволяє суттєво зменшити обчислювальні витрати і може бути застосований для розрахунку відповідальних об’єктів сучасної техніки.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Блох В. И.* Теория упругости / В. И. Блох. – Х. : Изд. Харьковск. Гос. Университета, 1964. – 484 с.
2. *Гуляр О.І.* Алгоритм розв’язання вісесиметричних задач нестаціонарної теплопровідності / О.І. Гуляр, С.О. Пискунов, Ю.В. Максим’юк, В.П. Андрієвський // Опір матеріалів і теорія споруд. - 2015. – Вип. 95. – С. 64-72
3. *Зенкевич О*. Метод конечных элементов в технике. М., «Мир», 1975.
4. *Коваленко А. Д.* Основы термоупругости / А. Д. Коваленко. – К. : Наук. думка, 1970. – 204 с.
5. *Шабров Н.Н.* Метод конечных элементов в расчетах деталей тепловых двигателей. – Л.: Машиностроение, 1968. – 212 с.

REFERENCES

1. *Bloh V. I.* Teoriya uprugosti / V. I. Bloh. – H. : Izd. Harkovsk. Gos. Universiteta, 1964. – 484 s.
2. *Gulyar O.I.* Algoritm rozv’yazannya vIsesimetrichnih zadach nestatsIonarnoYi teploprovIdnostI / O.I. Gulyar, S.O. Piskunov, Yu.V. Maksim’yuk, V.P. AndrIEvskiy // OpIr materIalIv I teorIya sporud. 2015. – Vip. 95. – S. 64 72
3. *Zenkevich O.* Metod konechnyih elementov v tehnike. M., «Mir», 1975.
4. *Kovalenko A. D.* Osnovyi termouprugosti / A. D. Kovalenko. – K. : Nauk. dumka, 1970. – 204 s.
5. *Shabrov N.N.* Metod konechnyih elementov v raschetah detaley teplovyih dvigateley. – L.: Mashinostroenie, 1968. – 212 s.

Maksimyuk Yu.V.

GENERAL TYPE FINITE ELEMENT FOR AXISYMMETRIC NONSTATIONARY HEAT CONDUCTION PROBLEM SOLUTION

The calculated ratio for general type finite element with numerical integration for axisymmetrical nonstationary heat conduction problem considering the variability of thermal constants in it's plane. Based on the comparison of the two types of finite elements revealed that the uniform distribution of thermal constants and no significant oblique finite elements within the object convergence results obtained based on them almost identically.

Keywords: numerical integration, finite element of general type calculated ratio, finite element method, unsteady heat conduction, axially symmetric body curvilinear coordinate system.

Максимюк Ю.В

КОНЕЧНЫЙ ЭЛЕМЕНТ ОБЩЕГО ВИДА ДЛЯ РЕШЕНИЯ ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ ЗАДАЧ НЕСТАЦИОНАРНОЙ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

В работе получены расчетные соотношения конечного элемента общего вида с численным интегрированием для осесимметричной задачи нестационарной теплопроводности с учетом переменности теплофизических констант в его плоскости. На основе сравнения двух типов конечных элементов установлено, что при равномерном распределении теплофизических констант и отсутствия существенно косоугольных конечных элементов в пределах объекта сходимость результатов полученных на их основе практически тождественна.

Ключевые слова: численное интегрирование, конечный элемент общего типа, разрешающие соотношения, метод конечных элементов, нестационарная теплопроводность, осесимметричные тела, криволинейная система координат.