

УДК 539.3

## МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ПРУЖНОГО ЗГИНАННЯ БУРИЛЬНОЇ КОЛОНИ У КАНАЛІ КРИВОЛІНІЙНОЇ НАФТО - ГАЗОВОЇ СВЕРДЛОВИНИ

**В.В. Гайдайчук<sup>1</sup>**,  
д-р техн. наук

**Л.В. Левківська<sup>2</sup>**,  
канд. техн. наук

**Я.І. Ковальчик<sup>3</sup>**,  
канд. техн. наук

<sup>1</sup>*Київський національний університет будівництва і архітектури,  
Повітрофлотський просп., 31, м. Київ, 03680*

<sup>2</sup>*Національний транспортний університет,  
вул Суворова 1, м. Київ, 01010*

<sup>3</sup>*Національна академія образотворчого мистецтва та архітектури,  
вул Вознесенський узвіз 20, м. Київ, 04053*

Використовуючи теорію гнучких криволінійних стержнів, поставлено задачу про пружне згинання бурильних колон у каналах криволінійних свердловин з геометричними недоскональностями їх осевих ліній при виконанні технологічних операцій буріння. Розроблене математичне забезпечення для аналізу цього явища. Чисельними методами досліджено чутливість зовнішніх та внутрішніх силових факторів, які діють на колону, до значень геометричних параметрів цих недосконалостей, а також до режиму виконання спуско-підймальних операцій. Наведено результати комп'ютерного моделювання.

**Ключові слова:** бурильна колона, криволінійна свердловина, прямі та обернені задачі, геометричні недосконалості, внутрішні і зовнішні сили.

**1. Вступ.** Сьогодні нафта і природний газ є основою світового паливно-енергетичного балансу. Продукти їх переробки широко використовуються у всіх галузях промисловості, сільського господарства, на транспорті і в побуті. Важко перерахувати всі сфери застосування нафти і природного газу, настільки їх значення в житті сучасного суспільства багатогранне.

Станом на 2014-2015 рр. 42 країни забезпечують щоденний видобуток чорного золота обсягом понад 100 000 барелів. Безумовними лідерами є Росія, Саудівська Аравія і США: 9-10 млн барелів на день. Кожну добу в світі викачують близько 85 млн. барелів нафти. Нові технології дозволяють видобувати її там, де десять років тому це вважалося безперспективним і навіть неможливим.

З українських надр нині щорічно видобувається близько 20 млрд. м<sup>3</sup>. природного газу, проте цієї кількості замало для нашої держави,

економіка якої потребує ще близько 60 млрд. м<sup>3</sup> блакитного палива на рік. Дефіцит вітчизняного природного газу покривається поставками з Європи та Росії, що постійно пов'язане з проблемними і конфліктними ситуаціями, які становлять загрозу для енергетичної безпеки України.

Енергетична безпека України є досить вразливою, оскільки наша держава енергетично залежна від інших країн на 80% по нафті і на 75% по газу.

Справжнім випробуванням для української нафтогазової галузі став 2014 р. Відбулося кілька значущих подій, які докорінно змінили ринок, передусім газовий. Через анексію Криму Україна втратила контроль над державною компанією "Чорноморнафтогаз" і над чорноморським шельфом, де працювали дві нові плавучі установки, а отже, втратила майже 2 млрд. м<sup>3</sup> газу щорічно або 10% видобутку. Інша частина видобувних потужностей України нині знаходиться на окупованій території Донбасу, тут втрати оцінюються в 50 млн. м<sup>3</sup>.

Враховуючи, що питання освоєння нових підземних енергетичних ресурсів та інтенсифікація їх добування для України постає дедалі гостро, проблема теоретичного моделювання механіки згинання бурильних колон у каналах криволінійних нафто-газових свердловин з метою запобігання їх аварійних режимів є досить актуальною.

**2. Аналіз науково-технічної літератури з даного напрямку дослідження.** Аналіз сучасної науково-технічної літератури (в основному, англійської) [1, 2] показав, що теоретичне дослідження бурильних колон у каналах криволінійних свердловин зводиться до розгляду спрощених моделей будівельної механіки руху абсолютно гнучкої нитки і найпростіших траєкторій свердловин, що складаються з прямолінійних ділянок, з'єднаних дугами кіл або ланцюгових ліній. Такий підхід може бути використаний лише для свердловин з ідеальною геометрією і не придатний для реальних свердловин [3].

Особливості проблеми теоретичного моделювання механіки поведінки криволінійних бурильних колон полягають в тому, що при її розгляді необхідно обчислювати як внутрішні поздовжні та поперечні сили і моменти, так і зовнішні сили контактної та фрикційної взаємодії колони зі стінкою свердловини. Для визначення внутрішніх сил, як правило, ставляться прямі задачі будівельної механіки, у той час як зовнішні сили обчислюються шляхом постановки обернених задач. У роботах авторського колективу В.І. Гуляєв, В.В. Гайдайчук, Л.В. Левківська (Гловач), С.М. Худолій, І.Л. Соловйов [5, 6] показано, що ці задачі повинні ставитися спільно з використанням теорії гнучких криволінійних стержнів [4].

В публікаціях [7, 8] виконані дослідження процесів переміщення (спуску, підйому, функціонування) бурильних колон у криволінійних свердловинах, представлена методика обчислення сил опору руху та сил контактної взаємодії між трубою колони і стінкою свердловини.

Дана стаття присвячена вдосконаленню розробленої раніше авторами математичної моделі пружного нелінійного деформування бурильних колон у каналах криволінійних свердловин [5 – 8] шляхом відмови від використання в розв'язувальних рівняннях геометричних характеристик, пов'язаних з радіусами кривини та скруту осьової лінії свердловини і переходу до функцій кривини та скруту. Такий підхід дозволяє спростити структуру розв'язувальних рівнянь і виключити з розгляду розривні функції геометричних характеристик.

**3. Методика моделювання пружного згинання бурильної колони у каналі криволінійної свердловини.** При моделюванні пружного деформування трубчасті бурильної колони в криволінійній свердловині з відомою геометрією в процесі буріння та виконання спуско-підйомних операцій, здійснюваних під дією поздовжньої сили  $F_z$  в точці її підвісу і крутного моменту  $M_z$ , а також розподілених сил тяжіння  $f^{gr}$ , сил  $f^c$  контактної взаємодії між БК та стінкою свердловини, сил  $f^{fr}$  і моментів  $m^{fr}$  їх фрикційної взаємодії, приймемо, що осьова лінія бурильної колони збігається з осьовою лінією свердловини. Тому можна вважати, що пружна лінія  $x(s)$ ,  $y(s)$ ,  $z(s)$  бурильної колони також відома і можна знайти всі її геометричні характеристики. Тут  $s$  – натуральний параметр, який вимірюється довжиною колони від деякої початкової точки до поточної.

Будемо вважати, що внаслідок деяких причин технологічного характеру, в обрис осьової лінії свердловини внесені локалізовані геометричні спотворення, причому спотворення проектної траєкторії свердловини не може супроводжуватися утворенням зламів її осьової лінії, і вона є диференційовною по параметру  $s$ . При цьому, однак, якщо ці недосконалості є дрібномасштабними, то функції кривизни кривої  $k_R(s)$  і кручення  $k_T(s)$  можуть набувати чималих значень. Будемо вважати також, що осьові лінії свердловини і колони збігаються.

Наведемо основні співвідношення, що визначають геометрію осьової лінії криволінійної свердловини.

Нехай рівняння осьової лінії свердловини в декартовій системі координат  $Oxyz$  мають вигляд

$$x = x(s), \quad y = y(s), \quad z = z(s) \quad (1)$$

або

$$\rho = \rho(s). \quad (2)$$

Тут  $\rho = x \mathbf{i} + y \mathbf{j} + z \mathbf{k}$ , де  $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$  – орти системи координат  $Oxyz$ .

Випишемо основні геометричні співвідношення, що використовуються для постановки задачі про деформування бурильної колони в криволінійній свердловині і побудови диференціальних рівнянь її згинання.

Для задання орієнтації зовнішніх і внутрішніх сил, прикладених до колони введемо рухомий тригранник Френе  $\boldsymbol{\tau}, \mathbf{n}, \mathbf{b}$ , де  $\boldsymbol{\tau}$  – одиничний дотичний вектор, напрямлений у бік зростання  $s$ ; одиничний вектор  $\mathbf{n}$ , напрямлений по головній нормалі до кривої та одиничний вектор  $\mathbf{b}$ , напрямлений по бінормалі так, щоб  $\boldsymbol{\tau}, \mathbf{n}$  і  $\mathbf{b}$  становили праву систему векторів.

Орт  $\boldsymbol{\tau}$  підраховується за формулою

$$\boldsymbol{\tau} = d\rho/ds. \quad (3)$$

Використовуючи другу похідну від  $\rho$  по  $s$ , побудуємо формулу

$$d^2\rho/ds^2 = k_R \cdot \mathbf{n}, \quad (4)$$

де  $k_R$  – кривина осьової лінії, що визначається співвідношенням

$$k_R = \sqrt{(x'')^2 + (y'')^2 + (z'')^2}. \quad (5)$$

Тут штрихом позначено диференціювання по  $s$ .

Вектор  $\mathbf{b}$  визначається з умови ортогональності системи  $\boldsymbol{\tau}, \mathbf{n}, \mathbf{b}$

$$\mathbf{b} = \boldsymbol{\tau} \times \mathbf{n}. \quad (6)$$

Його компоненти знаходяться із співвідношень

$$\begin{aligned} b_x &= \frac{1}{k_R} \left( \frac{dy}{ds} \cdot \frac{d^2z}{ds^2} - \frac{dz}{ds} \cdot \frac{d^2y}{ds^2} \right), \\ b_y &= \frac{1}{k_R} \left( \frac{dz}{ds} \cdot \frac{d^2x}{ds^2} - \frac{dx}{ds} \cdot \frac{d^2z}{ds^2} \right), \\ b_z &= \frac{1}{k_R} \left( \frac{dx}{ds} \cdot \frac{d^2y}{ds^2} - \frac{dy}{ds} \cdot \frac{d^2x}{ds^2} \right). \end{aligned} \quad (7)$$

Поряд із кривиною  $k_R$  важливою геометричною характеристикою осьової лінії свердловини є також її скрут  $k_T$ . Для його обчислення використовується формула

$$k_T = \boldsymbol{\tau} \cdot \left( \mathbf{n} \times \frac{d\mathbf{n}}{ds} \right). \quad (8)$$

При проведенні розрахунків простіше застосовувати скалярну форма

рівності (8)

$$k_T = k_R^{-2} \begin{vmatrix} x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \\ x''' & y''' & z''' \end{vmatrix}. \quad (9)$$

В процесі деформування бурильної колони та під час руху натурального триєдра по його осьовій лінії вздовж координати  $s$  доводиться враховувати обертання. Воно характеризується вектором Дарбу

$$\boldsymbol{\Omega} = k_R \mathbf{b} + k_T \boldsymbol{\tau}, \quad (10)$$

який представляє собою вектор повної кривини осьовій лінії та визначається як вектор кутової швидкості обертання натурального тригранника відносно свого початку при русі останнього вздовж пружної лінії в бік зростання  $s$  з одиничною лінійною швидкістю.

Необхідно відзначити також, що при використанні базису Френе потрібно враховувати важливу роль перших інтегралів

$$|\boldsymbol{\tau}| = 1, \quad |\mathbf{n}| = 1, \quad \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{n} = 0, \quad \boldsymbol{\tau} \times \mathbf{n} = \mathbf{b}, \quad (11)$$

які впливають з умови ортонормованості ортів  $\boldsymbol{\tau}$ ,  $\mathbf{n}$ ,  $\mathbf{b}$ .

Введемо пов'язану з поперечним перерізом колони систему головних осей інерції  $(u, v, w)$ , в якій вісь  $w$  напрямлена вздовж орта  $\boldsymbol{\tau}$ , а осі  $u, v$  орієнтовані вздовж головних осей згину осьової лінії, що являють собою лінії перетину площини поперечного перерізу з головними площинами згину. Так само, як і орти  $\mathbf{n}$ ,  $\mathbf{b}$ , вони лежать в нормальній площині та повернуті на кут  $\chi$ , відлічуваний від орта  $\mathbf{n}$  до осі  $u$ .

Вектор кутової швидкості  $\boldsymbol{\omega}_\chi$  головного триєдра  $(u, v, w)$  визначається співвідношенням  $\boldsymbol{\omega}_\chi = \boldsymbol{\Omega} + \frac{d\chi}{ds} \boldsymbol{\tau}$ .

Проекції вектора  $\boldsymbol{\omega}_\chi$  на осі  $u, v, w$  являють собою, відповідно, кривини проекції елемента  $ds$  на площини  $(v, w)$  і  $(u, w)$  і скрут осьової лінії. Прийемо для їх позначення символи  $p, q, r$  і обчислимо їх за формулами

$$p = k_R \sin \chi, \quad q = k_R \cos \chi, \quad r = k_T + \frac{d\chi}{ds}. \quad (12)$$

Співвідношення (1) – (12) повністю визначають геометричні характеристики осьової лінії свердловини й пружної лінії колони.

Розглянемо явище згинання бурильної колони при її русі в каналі свердловини в процесі буріння або виконання спуско-підйомних

операцій. Будемо вважати, що кривина  $k_R$  та скрут  $k_T$  кривої (2) настільки малі, що деформування колони відбувається в пружній стадії.

Напружений стан кожного умовно виділеного елемента бурильної колони визначається головними векторами внутрішніх сил  $\mathbf{F}(s)$  і моментів  $\mathbf{M}(s)$  у перетинах бурильної колони й розподіленими векторами зовнішніх сил і моментів інтенсивністю  $\mathbf{f}(s)$  і  $\mathbf{m}(s)$ . Сили  $\mathbf{f}$  включають у себе сили тяжіння  $\mathbf{f}^{gr}(s)$ , а також сили контактної взаємодії  $\mathbf{f}^c(s)$  й сили тертя  $\mathbf{f}^{fr}(s)$  між зовнішньою поверхнею труби БК та стінкою свердловини. Зовнішній розподілений момент  $\mathbf{m}(s)$  складається тільки з моменту сил тертя  $\mathbf{m}^{fr}(s)$ . У зв'язку з цим можна записати векторні рівняння рівноваги

$$\frac{d\mathbf{F}}{ds} = -\mathbf{f}^{gr} - \mathbf{f}^c - \mathbf{f}^{fr}, \quad \frac{d\mathbf{M}}{ds} = -\boldsymbol{\tau} \times \mathbf{F} - \mathbf{m}^{fr}, \quad (13)$$

які інваріантні по відношенню до будь-якої системи координат. У загальному випадку найбільш зручно їх записувати у рухомій системі осей  $(u, v, w)$ . Оскільки вона повертається по мірі руху уздовж координати  $s$ , необхідно повні похідні  $d\mathbf{F}/ds$ ,  $d\mathbf{M}/ds$  представити в рухомій системі. Тоді

$$\frac{d\mathbf{F}}{ds} = \frac{\tilde{d}\mathbf{F}}{ds} + \boldsymbol{\omega}_\chi \times \mathbf{F}, \quad \frac{d\mathbf{M}}{ds} = \frac{\tilde{d}\mathbf{M}}{ds} + \boldsymbol{\omega}_\chi \times \mathbf{M}. \quad (14)$$

Тут значком  $\sim$  позначена операція локального диференціювання.

Підставляючи праві частини рівностей (14) в рівняння (13), отримаємо

$$\begin{aligned} \frac{\tilde{d}\mathbf{F}}{ds} &= -\boldsymbol{\omega}_\chi \times \mathbf{F} - \mathbf{f}^{gr} - \mathbf{f}^c - \mathbf{f}^{fr}, \\ \frac{\tilde{d}\mathbf{M}}{ds} &= -\boldsymbol{\omega}_\chi \times \mathbf{M} - \boldsymbol{\tau} \times \mathbf{F} - \mathbf{m}^{fr}. \end{aligned} \quad (15)$$

Випишемо відповідні першому рівнянню три скалярних рівняння рівноваги сил

$$\begin{aligned} \frac{dF_u}{ds} &= r \cdot F_v - k_R \cos \chi \cdot F_w - f_u^{gr} - f_u^c, \\ \frac{dF_v}{ds} &= k_R \sin \chi \cdot F_w - r \cdot F_u - f_v^{gr} - f_v^c, \\ \frac{dF_w}{ds} &= k_R \cos \chi \cdot F_u - k_R \sin \chi \cdot F_v - f_w^{gr} - f_w^{fr}. \end{aligned} \quad (16)$$

З останньої рівності системи (12) будемо мати

$$\frac{d\chi}{ds} = r - k_T. \quad (17)$$

Враховуючи, що осі  $(u, v, w)$  є головними осями згину та скруту елемента колони, складові  $M_u$ ,  $M_v$ ,  $M_w$  моменту  $\mathbf{M}$  представимо у вигляді

$$M_u = Ap = Ak_R \sin \chi, \quad M_v = Aq = Ak_R \cos \chi, \quad M_w = Cr, \quad (18)$$

де  $A = EI$ ;  $C = GI_0$ ;  $E, G$  – модулі пружності матеріалу бурильної колони при розтягу й зсуві;  $I, I_0$  – осьовий і полярний моменти інерції поперечного перерізу труби бурильної колони.

За допомогою рівностей (18) й (17) друге векторне рівняння (15) зведемо до системи трьох скалярних рівнянь рівноваги моментів

$$\begin{aligned} \frac{dk_R}{ds} \sin \chi + k_R \cos \chi \cdot (r - k_T) &= \frac{A - C}{A} \cdot k_R \cos \chi \cdot r + \frac{F_v}{A}, \\ \frac{dk_R}{ds} \cos \chi - k_R \sin \chi \cdot (r - k_T) &= \frac{C - A}{A} \cdot k_R \sin \chi \cdot r - \frac{F_u}{A}, \end{aligned} \quad (19)$$

$$\frac{dr}{ds} = -\frac{m_w^{fr}}{C}.$$

Якщо геометрія осової лінії свердловини відома, рівняння (16), (19) дозволяють сформулювати задачу про контактному взаємодії бурильної колони з її стінкою в процесі буріння й виконання спуско-підйомних операцій.

Система шести рівнянь (16), (19) містить тільки три функції сил  $F_u(s)$ ,  $F_v(s)$ ,  $F_w(s)$  й функцію кута пружного скруту  $\chi$ , через яку при заданих  $k_R$  і  $k_T$  обчислюються моменти (18). Тим не менш, вона є недовизначеною, оскільки до неї входять також зовнішні розподілені сили контактної взаємодії  $f_u^c(s)$ ,  $f_v^c(s)$ , що підлягають визначенню, й сила  $f_w^{fr}(s)$ , а також момент  $m_w^{fr}(s)$  сил тертя. Нагадаємо, що задачі будівельної механіки, у яких внутрішні сили (або моменти) частково відомі, а деякі зовнішні сили (зазвичай це контактні сили або сили тертя) підлягають визначенню, називаються оберненими.

Для формулювання оберненої задачі в даному випадку зведемо перші два рівняння системи (19) до вигляду

$$\begin{aligned}
 F_u &= -A \frac{d k_R}{ds} \cos \chi - A k_R k_T \sin \chi + C k_R r \sin \chi, \\
 F_v &= A \frac{d k_R}{ds} \sin \chi - A k_R k_T \cos \chi + C k_R r \cos \chi.
 \end{aligned}
 \tag{20}$$

Продиференціюємо по  $s$  обидві частини цієї системи

$$\begin{aligned}
 \frac{dF_u}{ds} &= -A \frac{d^2 k_R}{ds^2} \cos \chi + A \frac{d k_R}{ds} \sin \chi \frac{d\chi}{ds} - A \frac{d k_R}{ds} k_T \sin \chi - \\
 &\quad - A k_R \frac{d k_T}{ds} \sin \chi - A k_R k_T \cos \chi \frac{d\chi}{ds} + C \frac{d k_R}{ds} r \sin \chi + \\
 &\quad + C k_R \frac{d r}{ds} \sin \chi + C k_R r \cos \chi \frac{d\chi}{ds}, \\
 \frac{dF_v}{ds} &= A \frac{d^2 k_R}{ds^2} \sin \chi + A \frac{d k_R}{ds} \cos \chi \frac{d\chi}{ds} - A \frac{d k_R}{ds} k_T \cos \chi - \\
 &\quad - A k_R \frac{d k_T}{ds} \cos \chi + A k_R k_T \sin \chi \frac{d\chi}{ds} + C \frac{d k_R}{ds} r \cos \chi + \\
 &\quad + C k_R \frac{d r}{ds} \cos \chi - C k_R r \sin \chi \frac{d\chi}{ds}.
 \end{aligned}$$

Після чого прирівняємо їх праві частини до правих частин двох перших рівностей системи (16). З урахуванням рівностей системи (20) отримаємо

$$\begin{aligned}
 f_u^c &= A \frac{d}{ds} \left( \frac{d k_R}{ds} \right) \cos \chi - A k_R k_T^2 \cos \chi + C k_R k_T r \cos \chi + \\
 &\quad + 2A \frac{d k_R}{ds} k_T \sin \chi + A k_R \frac{d k_T}{ds} \sin \chi - C \frac{d k_R}{ds} r \sin \chi + \\
 &\quad + m_w^{fr} k_R \sin \chi - F_w k_R \cos \chi - f_u^{gr},
 \end{aligned}
 \tag{21}$$

$$\begin{aligned}
 f_v^c &= -A \frac{d}{ds} \left( \frac{d k_R}{ds} \right) \sin \chi + A k_R k_T^2 \sin \chi - C k_R k_T r \sin \chi + \\
 &\quad + 2A \frac{d k_R}{ds} k_T \cos \chi + A k_R \frac{d k_T}{ds} \cos \chi - C \frac{d k_R}{ds} r \cos \chi + \\
 &\quad + m_w^{fr} k_R \cos \chi + F_w k_R \sin \chi - f_u^{gr}.
 \end{aligned}$$

За допомогою рівностей (21) підрахуємо повну силу контактної взаємодії бурильної колони й стінки свердловини

$$f^c = \sqrt{(f_u^c)^2 + (f_v^c)^2}.
 \tag{22}$$



Будемо вважати, що при бурінні й виконанні спуско-підйомних операцій бурильної колони одночасно здійснює осьовий рух зі швидкістю  $\dot{w}$  і обертається з кутовою швидкістю  $\omega$ . Тоді повну силу тертя  $f^{fr} = \mu \cdot f^c$  можна розкласти на дві взаємно перпендикулярні складові

$$\begin{aligned} f_w^{fr} &= \pm \mu \cdot f^c \frac{\dot{w}}{\sqrt{\dot{w}^2 + (\omega d/2)^2}}, \\ f_\omega^{fr} &= \pm \mu \cdot f^c \frac{\omega d}{2\sqrt{\dot{w}^2 + (\omega d/2)^2}}, \end{aligned} \quad (23)$$

які пропорційні відповідним компонентам швидкостей  $\dot{w}$  та  $\omega d/2$ . Тут  $\mu$  – коефіцієнт тертя;  $d$  – зовнішній діаметр труби бурильної колони.

Перша з цих сил перешкоджає осьовому руху бурильної колони, друга спрямована в коловому напрямку й призводить до виникнення розподіленого моменту сил тертя

$$m_w^{fr} = f_\omega^{fr} \cdot \frac{d}{2} = \pm \mu \cdot f^c \frac{\omega d^2}{4\sqrt{\dot{w}^2 + (\omega d/2)^2}}. \quad (24)$$

Знаки « $\pm$ » в формулах (23), (24) вибираються в залежності від напрямків руху й обертання бурильної колони.

Виведені співвідношення дозволяють сформулювати систему рівнянь пружного згинання бурильної колони в свердловині із заданою осьовою лінією в остаточному вигляді

$$\begin{aligned} \frac{d\chi}{ds} &= r - k_T, & \frac{dr}{ds} &= -\frac{1}{C} m_w^{fr}, \\ \frac{dF_w}{ds} &= k_R \cos \chi \cdot F_u - k_R \sin \chi \cdot F_v - f_w^{gr} - f_w^{fr}, \\ F_u &= -A \frac{dk_R}{ds} \cos \chi - A k_R k_T \sin \chi + C k_R r \sin \chi, \\ F_v &= A \frac{dk_R}{ds} \sin \chi - A k_R k_T \cos \chi + C k_R r \cos \chi, \\ f_w^{fr} &= \pm \mu \cdot \sqrt{(f_u^c)^2 + (f_v^c)^2} \frac{\dot{w}}{\sqrt{\dot{w}^2 + (\omega d/2)^2}}, \\ m_w^{fr} &= \pm \mu \cdot \sqrt{(f_u^c)^2 + (f_v^c)^2} \frac{\omega d^2/4}{\sqrt{\dot{w}^2 + (\omega d/2)^2}}, \end{aligned} \quad (25)$$

$$\begin{aligned}
 f_u^c &= A \frac{d^2 k_R}{ds^2} \cos \chi - A k_R k_T^2 \cos \chi + C k_R k_T r \cos \chi + \\
 &+ 2 A \frac{d k_R}{ds} k_T \sin \chi + A k_R \frac{d k_T}{ds} \sin \chi - C \frac{d k_R}{ds} r \sin \chi + \\
 &+ m_w^{fr} k_R \sin \chi - F_w k_R \cos \chi - f_u^{gr}, \\
 f_v^c &= -A \frac{d^2 k_R}{ds^2} \sin \chi + A k_R k_T^2 \sin \chi - C k_R k_T r \sin \chi + \\
 &+ 2 A \frac{d k_R}{ds} k_T \cos \chi + A k_R \frac{d k_T}{ds} \cos \chi - C \frac{d k_R}{ds} r \cos \chi + \\
 &+ m_w^{fr} k_R \cos \chi + F_w k_R \sin \chi - f_u^{gr}.
 \end{aligned}$$

Побудована система рівнянь дає можливість на кожному етапі виконання технологічних операцій буріння визначити параметри напруженого стану бурильної колони та сил опору, що генеруються при її осьовому і обертальному рухах.

При такому підході головною складністю є задача обчислення геометричних характеристик осьової лінії бурильної колони. Оскільки осьова лінія свердловини з локалізованими геометричними недосконалостями описується досить складними аналітичними виразами, для обчислення функції кривини  $k_R(s)$  та скруту кривої  $k_T(s)$  і їхніх похідних можна використовувати метод скінчених різниць. Для досягнення прийнятної точності при їх знаходженні необхідно крок диференціювання та інтегрування  $\Delta s$  вибирати досить малим.

**4. Результати числових досліджень.** З допомогою розробленої удосконаленої методики проводилось дослідження впливу спіральних і косинусоїдальних недосконалостей осьової лінії свердловини на значення сил опору осьовому руху бурильної колони та режим виконання спуско-підіймальних операцій. До розгляду брались нижні фрагменти свердловин, осьова лінія яких є умовно прямолінійною та нахиленою до горизонтальної площини під деяким кутом  $\beta$ , а також цілі комбіновані свердловини, що складаються з верхньої криволінійної ділянки та нижньої умовно прямолінійної (рис. 1). В обох випадках вважалось, що на прямолінійних ділянках на осьову лінію накладені геометричні недосконалості у формі кругової циліндричної спіралі або плоскої гармоніки з однаковими значеннями їх амплітудних величин  $a$  та довжин хвиль  $\lambda$ .

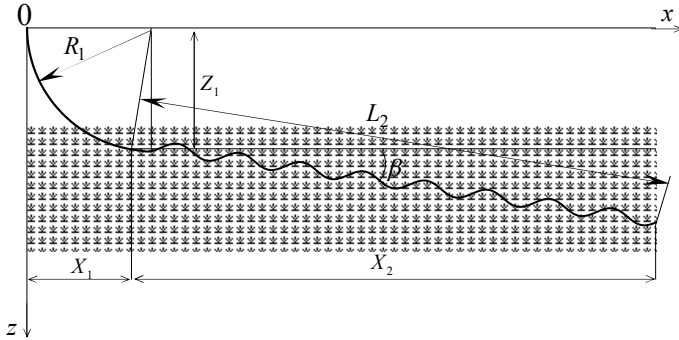


Рис. 1. Геометрична схема траєкторії осьової лінії свердловини, утвореної з двох частин

Рівняння осьової лінії свердловини з недосконаlostями у формі циліндричної спіралі вибирались у вигляді

$$\begin{aligned} x &= s \cdot \sin \alpha \cdot \cos \beta + [a \sin(s \cdot \cos \alpha / a)] \cdot \sin \beta, \\ y &= a \cdot \cos(s \cdot \cos \alpha / a), \\ z &= -s \cdot \sin \alpha \cdot \sin \beta + [a \sin(s \cdot \cos \alpha / a)] \cdot \cos \beta, \end{aligned} \quad (26)$$

де  $a$  – радіус спіралі;  $\alpha$  – кут підйому спіралі.

Рівняння осьової лінії свердловини з косинусоїдальними недосконаlostями мали вид

$$\begin{aligned} x &= \lambda \vartheta \cos \beta / 2\pi + a \cos \vartheta \sin \beta, \quad y = 0, \\ z &= -\lambda \vartheta \sin \beta / 2\pi + a \cos \vartheta \cos \beta, \end{aligned} \quad (27)$$

де  $a$  – амплітуда недосконаlostі;  $\lambda$  – крок недосконаlostі;  $\vartheta$  – новий незалежний параметр.

Розрахунки сил опору для бурильної колони у свердловині, утвореній з ділянки дуги кола та умовно прямолінійної ділянки з косинусоїдальними недосконаlostями (рис. 1), виконані при значеннях кута нахилу до горизонталі колони на другій ділянці  $\beta = 0$ ,  $\beta = 0,9 \arctg \mu = 0,18 \text{ рад.}$ ,  $\beta = \arctg \mu = 0,2 \text{ рад.}$ ,  $\beta = 1,1 \arctg \mu = 0,22 \text{ рад.}$  і параметрів  $a$ ,  $\lambda$ , що визначають амплітуду  $0,1 \leq a \leq 5$  м й довжину хвилі  $100 \leq \lambda \leq 400$  м гармоніки косинусоїдального відхилення геометрії свердловини від прямолінійної форми показали, що у випадку підйому колони при довжині хвилі  $\lambda \geq 200$  м, сила  $F_w(0)$ , з якою колони підтримується в точці її підвісу до бурильної установки, мало залежить від  $a$  і не перевищує  $G$  зі зміною  $\beta$ . При  $\lambda = 100$  м вплив величини  $a$  на

силу  $F_w(0)$  стає більш відчутним, а при  $\lambda < 100\text{м}$  ця величина взагалі стає дуже чутливою до  $a$ , швидко зростає й перевищує  $G$ .

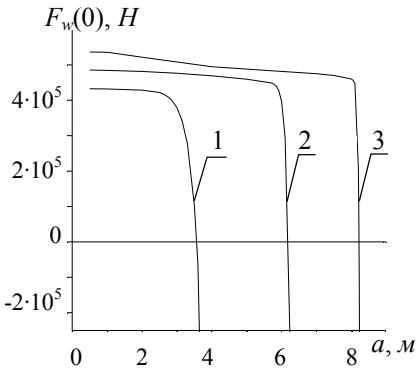


Рис. 2. Графік залежності поздовжньої сили  $F_w(0)$  в точці підвісу від амплітуди хвилі  $a$  та геометричної недосконалості

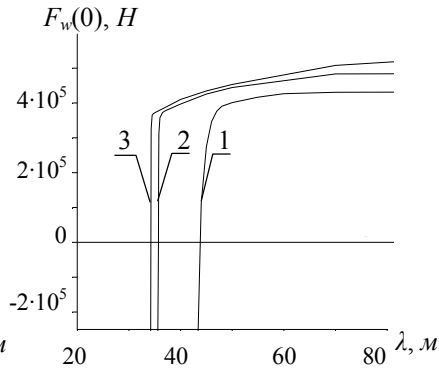


Рис. 3. Графік залежності поздовжньої сили  $F_w(0)$  в точці підвісу від довжини хвилі  $\lambda$  та геометричної недосконалості

Щоб підібрати значення кута  $\beta$ , при якому бурильна колона могла б спускатися в свердловину під дією сил тяжіння без підштовхування її зверху, були проведені розрахунки при величині  $\beta$ , що лежить в околі значення кута тертя  $\arctg\mu$ . На рис. 2 показані графіки залежності  $F_w(0)$  від  $a$  при  $\lambda = 100\text{м}$  для випадків  $\beta = 0,9\arctg\mu$  (крива 1),  $\beta = \arctg\mu$  (крива 2) і  $\beta = 1,1\arctg\mu$  (крива 3). Можна бачити, що при  $\beta = 0,9\arctg\mu$  значення  $F_w(0)$  виявляється набагато меншим  $G$  і на проміжку  $2,5 < a < 3,6\text{м}$  воно швидко спадає до нуля, набуваючи потім від'ємних значень. Тому процес спуску бурильної колони з таким кутом  $\beta$  нахилу її другої ділянки може бути реалізований лише при значеннях амплітуди недосконалостей  $a < 3,6\text{м}$ . Збільшення кута  $\beta$  до величини  $\arctg\mu$  призводить до збільшення сили  $F_w(0)$  й граничного значення  $a$  до  $6,2\text{м}$ . Найбільш сприятливим для реалізації процесу спуску виявився випадок  $\beta = 1,1\arctg\mu$ , при якому граничне значення  $a$  досягає  $8,25\text{м}$ .

На рис. 3. представлені графіки залежності сили опору  $F_w(0)$  від довжини хвилі недосконалості  $\lambda$  при  $a = 1\text{м}$  для аналогічних значень кутів  $\beta$ . З наведених графіків видно, що випадок  $\beta = 1,1\arctg\mu$  знову є найбільш сприятливим для реалізації процесу спуску, причому граничне значення величини  $\lambda$  перебуває в околі  $50\text{м}$ . Зі зменшенням  $\lambda$

спостерігаються їх критичні значення, при яких рух бурильної колони стає неможливим.

Результати розрахунків також показали, що при великих швидкостях обертального руху колони сили опору для спіральних та косинусоїдальних недосконалостей практично співпадають, а зі зменшенням швидкості обертального руху ці сили швидко зростають, що особливо помітно у випадку спіральних недосконалостей.

**5. Висновки.** Розроблена вдосконалена математична модель пружного нелінійного деформування бурильних колон у каналах криволінійних свердловин, яка заснована на відмові від використання в розв'язувальних рівняннях геометричних характеристик, пов'язаних з радіусами кривини та скруту осьової лінії свердловини і переходу до функцій кривини та скруту з метою спрощення структури розв'язувальних рівнянь і уникнення сингулярностей, пов'язаних зі зверненням у нескінченність радіусів кривини та скруту.

На основі розробленої методики поставлена задача про дослідження пружного згинання та виникнення критичних станів бурильних колон у криволінійних свердловинах, осьова лінія яких має додаткові локальні викривлення, викликані дрібномасштабними косинусоїдальними (плоска задача) і спіральними (просторова задача) геометричними недосконалостями.

Підраховані сили опору, що виникають у процесі здійснення спуско-підіймальних операцій при різних значеннях кута нахилу свердловини і відношеннях між параметрами швидкостей осьового та обертального рухів. Виявлені критичні режими процесів, які розглядаються.

#### СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Brett J.F., Beckett A.D., Holt C.A., Smith D.L.* Uses and limitations of drillstring tension and torque models for monitoring hole conditions. SPE Drill. Eng. 1989. No. 4. P. 223 – 229.
2. *Sawaryn, S.J., Thorogood J.L.* "A compendium of directional calculations based on the minimum curvature method" // SPE Drilling & Completion, 2005, March, - p. 24-36.
3. *Mitchell R.F., Samuel R.* How good is the torque / drag model? SPE Drilling & Completion. 2009. P. 62 – 7. March.
4. *Гуляев В.И., Гайдайчук В.В., Кошкин В.Л.* Упругое деформирование, устойчивость и колебания гибких криволинейных стержней. – Киев: Наукова думка, 1992. – 344 с.
5. *Гайдайчук В.В., Худолій С.М., Гловач Л.В.* Теоретична ідентифікація сил опору, що діють на криволінійні бурильні колони // Опір матеріалів і теорія споруд. – 2006. – №78. – С. 52 – 60.
6. *Гуляев В.И., Гайдайчук В.В., Соловьев И.Л., Гловач Л.В.* Компьютерное моделирование сил сопротивления, действующих на криволинейные бурильные колонны // Проблемы прочности. – 2007. – № 5, – С. 55 – 67.
7. *Gulyayev V.I., Hudoly S.M., Glovach L.V.* The computer simulation of drill column dragging in inclined bore-holes with geometrical imperfections // International Journal of Solids and Structures. – 2011. – V.48. – P. 110 – 118.

8. *Гуляев В.И., Андрусенко О.М., Левківська Л.В.* Мінімізація сил опору при осьовому русі бурильної колони криволінійній свердловині // Вісник Національного транспортного університету. Серія "Технічні науки". Науково-технічний збірник. Випуск 1 (31), 2015. – С. 145 – 152.

## REFERENCES

1. *Brett J.F., Beckett A.D., Holt C.A., Smith D.L.* Uses and limitations of drillstring tension and torque models for monitoring hole conditions. SPE Drill. Eng. 1989. No. 4. P. 223 – 229.
2. *Sawaryn, S.J., Thorogood J.L.* "A compendium of directional calculations based on the minimum curvature method"// SPE Drilling & Completion, 2005, March, - p. 24-36.
3. *Mitchell R.F., Samuel R.* How good is the torque / drag model? SPE Drilling & Completion. 2009. P. 62 – 7. March.
4. *Gulyayev V.I., Gaidaichuk V.V., Koshkin V.L.* Elastic Deforming, Stability and Vibrations of Flexible Curvilinear Rods. – Kiev, Naukova Dumka, 1992. – 344 p.
5. *Gaidaichuk V.V., Hudoly S.M., Glovach L.V.* Theoretical identification of resistance forces acting on curvilinear drill strings // Strength of Materials and Theory of Structures. – 2006. – № 78. – P. 52 – 60.
6. *Gulyayev V.I., Gaidaichuk V.V., Solovjov I.L., Glovach L.V.* Numerical simulation of the resistance forces acting on the curvilinear drill strings// International scientific and technical Journal Problems of strength. – 2007. – V. 5. – P. 55 – 67.
7. *Gulyayev V.I., Hudoly S.M., Glovach L.V.* The computer simulation of drill column dragging in inclined bore-holes with geometrical imperfections // International Journal of Solids and Structures. – 2011. – V.48. – P. 110 – 118.
8. *Gulyayev V.I., Andrusenko E.N., Levkivska L.V.* Minimization of resistance forces in axial motion of a drill string in a curve bore-hole // Visnyk National Transport University. Series "Technical sciences". Scientific and Technical Collection. – Kyiv. National Transport University. 2015. – Issue 1 (34). – P. 145 – 152.

*Gaidachuk V.V., Levkivska L.V., Kovalchuk Y.I.*

### **MATHEMATICAL MODELING OF THE DRILL STRING BENDING ELASTIC CHANNEL CURVILINEAR OIL AND GAS BOREHOLES**

Using the theory of curvilinear flexible rods, the problem of elastic bending of drill strings in the channels of curvilinear boreholes with geometric imperfections of their axial lines when performing the drilling operation is posed. The improved mathematical model of non-linear elastic deforming of drill strings in the channels of curvilinear boreholes is created. In the model, the stiffnesses in bending, inhomogeneous gravity forces as well as forces of contact and friction interaction of the drill columns with the bore-hole wall are taken into consideration. On the basis of usage of a specially chosen movable reference frame, the simplified constitutive equations are elaborated. They differ by absence of singularities connected with transformation of the radii of curvature and twist into infinity.

Through the use of computer simulation methods the problems about determining the resistance forces and moments in performing lifting-lowering operations are solved. The investigation of the forces sensitivity to the bore-hole trajectory shape is carried out.

The problems about modeling of elastic bending and origin of critical states for drill strings in curvilinear bore-holes with spiral and sinusoidal imperfections are solved. To the consideration were taken lower fragments of wells, the axial line of which is conventionally straight and inclined to the horizontal plane at an angle, as well as whole composite wells, consisting of the upper curvilinear section and the lower conditionally rectilinear. In both cases, it was considered that geometric imperfections in the form of a circular cylindrical spiral or flat harmonic with the same values of their amplitude values and wavelengths were imposed on straight lines on the axial line. The diapasons of geometry and imperfection parameters corresponding to favorable and unfavorable regimes of functioning are found; their critical values corresponding to the drill columns sticking are calculated.

**Key words:** drill string, curvilinear bore-hole, direct and inverse problems, geometric imperfections, internal and external forces.

*Гайдайчук В.В., Левковская Л.В., Ковальчик Я.И.*

### **МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ УПРУГОГО ИЗГИБАНИЯ БУРИЛЬНОЙ КОЛОННЫ В КАНАЛЕ КРИВОЛИНЕЙНОЙ НЕФТЕ – ГАЗОВОЙ СКВАЖИНЫ**

Используя теорию гибких криволинейных стержней, поставлена задача об упругом изгибании бурильных колонн в каналах криволинейных скважин с геометрическими несовершенствами их осевых линий при выполнении технологических операций бурения. Создано математическое обеспечение для анализа этого явления. Численными методами исследовано влияние внешних и внутренних силовых факторов, действующих на колонну, на значения геометрических параметров этих несовершенств, а также на режим выполнения спуско-подъёмных операций. Приведены результаты компьютерного моделирования.

**Ключевые слова:** бурильная колонна, криволинейная скважина, прямые и обратные задачи, геометрические несовершенства, внутренние и внешние силы.

УДК 539.3

*Гайдайчук В.В., Левківська Л.В., Ковальчик Я.І. Математичне моделювання пружного згинання бурильної колони у каналі криволінійної нафто - газової свердловини // Опір матеріалів і теорія споруд. – 2016. – Вип. 97. – С. 43 – 58.*

*Використовуючи теорію гнучких криволінійних стержнів, поставлено задачу про пружне згинання бурильних колон у каналах криволінійних свердловин з геометричними недоскональностями їх осевих ліній при виконанні технологічних операцій буріння.*

*Gaidaiychuk V.V., Levkivska L.V., Kovalchuk Y. I. Mathematical modeling of the drill string bending elastic channel curvilinear oil and gas boreholes // Strength of Materials and Theory of Structures. – 2016. – Issue. 97. – P. 43 – 58.*

*Using the theory of curvilinear flexible rods, the problem of elastic bending of drill strings in the channels of curvilinear boreholes with geometric imperfections of their axial lines when performing the drilling operation is posed.*

*Гайдайчук В.В., Левковская Л.В., Ковальчик Я.И. Математическое моделирование упругого изгибания бурильной колонны в канале криволинейной нефти – газовой скважины // Соппротивление материалов и теория сооружений. – 2016. – Вип. 97. – С. 43 – 58.*

*Используя теорию гибких криволинейных стержней, поставлена задача об упругом изгибании бурильных колонн в каналах криволинейных скважин с геометрическими несовершенствами их осевых линий при выполнении технологических операций бурения.*

**Автор (вчена ступень, вчене звання, посада):** доктор технічних наук, професор, завідувач кафедри теоретичної механіки Київського національного університету будівництва і архітектури *ГАЙДАЙЧУК Віктор Васильович*.

**Адреса робоча:** 03680 Україна, м. Київ, проспект Повітрофлотський, 31, к. 433, Київський національний університет будівництва і архітектури, кафедра теоретичної механіки, *ГАЙДАЙЧУКУ Віктору Васильовичу*.

**Роб. тел.** +380 (44) 241-55-72;

**Моб. тел.** +380 (97) 542-94-27;

**e-mail:** [viktor\\_gaydaychuk@bigmir.net](mailto:viktor_gaydaychuk@bigmir.net)

**Автор (вчена ступень, вчене звання, посада):** кандидат технічних наук, доцент кафедри вищої математики Національного транспортного університету *ЛЕВКІВСЬКА Людмила Володимирівна*.

**Адреса робоча:** 01103 Україна, м. Київ, вул. Кіквідзе, 42, к. 514, Національний транспортний університет, кафедра вищої математики, *ЛЕВКІВСЬКІЙ Людмилі Володимирівні*.

**Моб. тел.** +380 (97) 547-57-24;

**e-mail:** [l\\_v\\_g@ukr.net](mailto:l_v_g@ukr.net)

**Автор (вчена ступень, вчене звання, посада):** кандидат технічних наук, старший викладач кафедри архітектурних конструкцій Національної академії образотворчого мистецтва та архітектури *КОВАЛЬЧИК Ярослав Ігорович*.

**Адреса робоча:** 04053, Україна, м. Київ, вул. Вознесенський узвіз 20, Національна академія образотворчого мистецтва та архітектури, кафедра архітектурних конструкцій, *КОВАЛЬЧИКУ Ярославу Ігоровичу*.

**Моб. тел.** +380 (93) 723-49-54;

**e-mail:** [kovalchuk\\_yaroslav@ukr.net](mailto:kovalchuk_yaroslav@ukr.net)