УДК 539.3

ВИЗНАЧЕННЯ *G*-ІНТЕГРАЛА НА ОСНОВІ ОБЧИСЛЕННЯ ІНВАРІАНТНИХ ОБ'ЄМНИХ ІНТЕГРАЛІВ МЕТОДОМ РЕАКЦІЙ

О.О. Шкриль[1],
канд. техн. наук

[1]*Київский національний університет будівництва і архітектури, Київ*
Повітрофлотський просп., 31, м. Київ. 03680

На основі обчислення інваріантних об'ємних інтегралів методом реакцій, розроблено метод визначення параметра Гріффітца *G* в дискретних моделях методу скінченних елементів (МСЕ). Розв'язані тестові задачі. Отримані результати підтверджують ефективність методики.

Ключові слова: напіваналітичний метод скінченних елементів (НМСЕ), параметр Гріффітца, метод реакцій.

Вступ. Серед методів визначення параметрів механіки руйнування на основі МСЕ найбільшого поширення набули енергетичні підходи. На сьогоднішній день проведені чисельні дослідження, які показали ефективність методу реакцій в реалізації енергетичного підходу. Проте в зазначених дослідженнях розглядається питання визначення J-інтеграла Черепанова-Райса [1-3]. Загально відомо, що при наявності об'ємних сил різної прирори J-інтеграл не можна використовувати для оцінки тріщиностійкості. Тому в даній статті проводиться узагальнення методу реакцій для визначення критерія Гріффітца G, який дозволяє оцінювати тріщиностійкість при дії об'ємних сил різної природи.

1. Вихідні енергетичні співвідношення Гріффітца. Для утворення нової поверхні тріщини повинна виконуватись наступна енергетична залежність: [4,7]

$$\frac{d}{dS}\left(U - F + W\right) = 0\,, \tag{1}$$

де *U*- пружня енергія тіла; *F* – робота зовнішніх сил; *W* – енергія, що потрібна для утворення нової поверхні тріщини *dS.*

Якщо із запису (1) виразити інтенсивність енергії, що звільнюється при утворенні нової поверхні тріщини, то ми отримаємо параметр Гріффітца G :

$$G = \frac{dW}{dS} = \frac{d}{dS}\left(F - U\right). \tag{2}$$

Робота зовнішніх сил та потенційної енергії деформації визначаються за відомими формулами в термінах переміщень:

$$F = \vec{P}^T\vec{\Delta}, \qquad U = \int_0^{\Delta} Pd\Delta = \frac{1}{2}\vec{P}^T\vec{\Delta}. \tag{3}$$

2. Подання вихідних співвідношень для дискретних моделей МСЕ. В дискретних моделях МСЕ, що складається з n вузлів, визначення роботи зовнішніх сил виконується за відповідними величинами вузлових навантажень та переміщень:

$$F = \sum_{i=1}^{n} \vec{P}_i^T\vec{\Delta}_i, \tag{4}$$

де $\vec{P}_i^T = \left\{P_1\ P_2\ P_3\right\}_i$ - вектор зовнішніх сил в i-тому вузлі, $\vec{\Delta}_i = \left\{\Delta_1\,\Delta_2\,\Delta_3\right\}_i^T$ - вектор переміщень в i-тому вузлі.

Виходячи з умов рівноваги, реакції що виникають у вузлах дискретної моделі повинні врівноважувати зовнішні сили:

$$\vec{P}_i^T = \vec{R}_i^T = \left\{R_1\ R_2\ R_3\right\}_i.$$

Тому формули (3) в дискретних моделях МСЕ можна подати через вузлові величини реакцій та переміщень:

$$F = \sum_{i=1}^{n} \vec{R}_i^T\vec{\Delta}_i, \qquad U = \sum_{i=1}^{n} \frac{\vec{R}_i^T\vec{\Delta}_i}{2}. \tag{5}$$

Дискретний аналог формули (2) при СЕ дискретизації набуває вигляду :

$$G = \frac{\Delta W}{\Delta S} = \frac{\Delta F - \Delta U}{\Delta S}. \tag{6}$$

Для реалізації формули (6) в дискретних моделях розглянемо просторове тіло об’ємом V з тріщиною в двох рівноважних станах, вздовж фронта якої виділимо деякий замкнутий об’єм v (рис. 1).

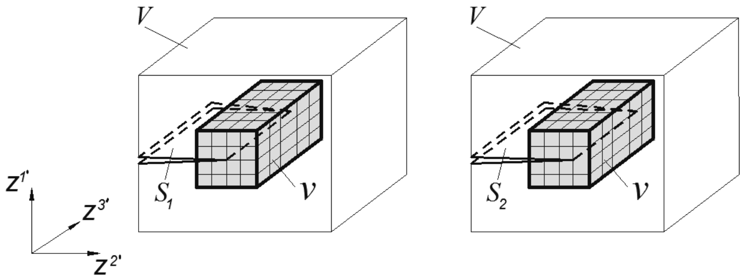

Рис. 1. Об’єм інтегрування навколо тріщини

Передбачається, що поверхня тріщини S проходить по граням СЕ, а лінія фронту - по ребрам СЕ з тріщиною. Перший стан відповідає початковому положенню тріщини, другий – новому положенню, отриманому при зростанні тріщини на один крок сітки із виникненням нової поверхні тріщини ΔS (рис. 2).

Введемо наступні позначення: $\{u_V^I\}$, $\{u_V^{II}\}$ – вектори вузлових переміщень, $\{R_V^I\}$, $\{R_V^{II}\}$ – вектори вузлових реакцій, $[K_V^I]$,$[K_V^{II}]$ – матриці жорсткості СЕМ всього тіла в першому та другому стані. Із врахуванням прийнятих позначень запишемо формулу визначення приросту енергії, що потрібна для утворення нової поверхні тріщини в дискретних моделях:

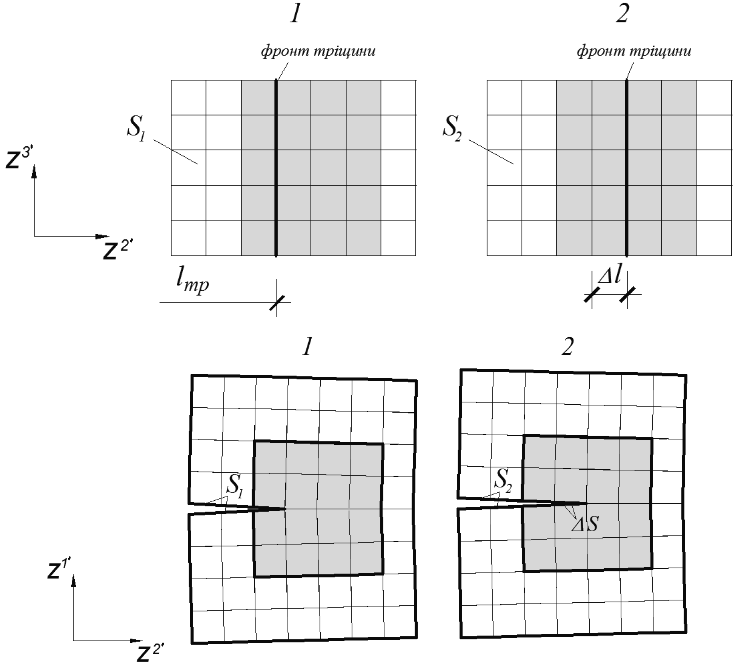

Рис. 2. Приріст тріщини в дискретній моделі.

$$\Delta W = \Delta F - \Delta U = \{R_V\}^T \Delta u_V - \Delta U_V , \tag{7}$$

де:

$$\{R_V\} = \frac{1}{2}\left(\{R_V^I\} + \{R_V^{II}\}\right), \quad \Delta u_V = \{u_V^{II}\} - \{u_V^I\},$$

$$\Delta U_V = U_V^{II} - U_V^I = \frac{1}{2}\left(\{R_V^{II}\}^T \{u_V^{II}\} - \{R_V^I\}^T \{u_V^I\}\right).$$

Підставивши вирази (7) в (6), одержимо формулу визначення параметра Гріффітца із використанням всіх вузлів дискретної моделі тіла:

$$G=\frac{\left\{R_V\right\}^T\Delta u_V-\frac{1}{2}\left(\left\{R_V^{II}\right\}^T\left\{u_V^{II}\right\}-\left\{R_V^{I}\right\}^T\left\{u_V^{I}\right\}\right)}{\Delta S}\,. \qquad (8)$$

Існуючі методи для обчислення G в дискретних моделях виділяють певну область навколо фронту тріщини. Тому за аналогією виведемо формулу визначення G розглядаючи не всю дискретну модель, а лише частину у вигляді замкнутого об’єму v довільної конфігурації.

Покажемо, що для будь-якої частини СЕМ тіла обємом V_N , яка не містить тріщину, буде справедливою наступна енергетична рівність:

$$\Delta W_{V_N}=\frac{1}{2}\left(\left\{R_{V_N}^{I}\right\}+\left\{R_{V_N}^{II}\right\}\right)^T\left(\left\{u_{V_N}^{II}\right\}-\left\{u_{V_N}^{I}\right\}\right)-\frac{1}{2}\left(\left\{R_{V_N}^{II}\right\}^T\left\{u_{V_N}^{II}\right\}-\left\{R_{V_N}^{I}\right\}^T\left\{u_{V_N}^{I}\right\}\right)=0\,. \qquad (9)$$

Після перемноження реакцій на відповідні переміщення і додавання подібних складників запис набуде наступного вигляду:

$$\Delta W_{V_N}=\frac{1}{2}\left(\left\{R_{V_N}^{I}\right\}^T\left\{u_{V_N}^{II}\right\}-\left\{R_{V_N}^{II}\right\}^T\left\{u_{V_N}^{I}\right\}\right).$$

Представимо вектори реакцій через вузлові переміщення, враховуючи що матриці жорсткості дискретної моделі в обох станах однакові:

$$\Delta W_{V_N}=\frac{1}{2}\left(\left\{u_{V_N}^{I}\right\}^T\left[K_{V_N}\right]\left\{u_{V_N}^{II}\right\}-\left\{u_{V_N}^{II}\right\}^T\left[K_{V_N}\right]\left\{u_{V_N}^{I}\right\}\right)=0\,.$$

Із енергії ΔW виразу (8), яка обчислюється для всієї дискретної моделі, можна відняти вираз типу (9), що буде обчисленим для довільного об’єму дискретної моделі без тріщини. Позначаючи v довільний об’єм СЕМ тіла, в якому міститься фронт тріщини в обох її станах на основі (8),(9) маємо:

$$G=\frac{1}{2\Delta S}\left(\left(\left\{R_v^{I}\right\}+\left\{R_v^{II}\right\}\right)^T\left(\left\{u_v^{II}\right\}-\left\{u_v^{I}\right\}\right)-\left\{R_v^{II}\right\}^T\left\{u_v^{II}\right\}+\left\{R_v^{I}\right\}^T\left\{u_v^{I}\right\}\right). \qquad (10)$$

При незмінності матриці жорсткості фрагмента об’ємом v в обох розглядуваних станах, формула визначення G (10) набуває спрощеного вигляду:

$$G=\frac{1}{2\Delta S}\left(\left\{R_v^{I}\right\}^T\left\{u_v^{II}\right\}-\left\{R_v^{II}\right\}^T\left\{u_v^{I}\right\}\right). \qquad (11)$$

3. Апробація методики на двовимірних тестових задачах. Апробація розробленої методики була проведена на тестовій задачі про розтяг нескінченної пластини з центральною тріщиною (рис. 3,а). Вихідні дані: $\sigma=1\frac{кг}{см^2}$, $E=1\frac{кг}{см^2}$, $\nu=0$, l=3 *мм*. Враховуючи симетрію, розглядалась чверть пластини (рис. 3,*б*,*в*). На першому етапі проводилось дослідження потрібних розмірів дискретної моделі *b*, при яких напружено-деформований стан в околі вершини тріщини буде відповідати нескінченній пластині.

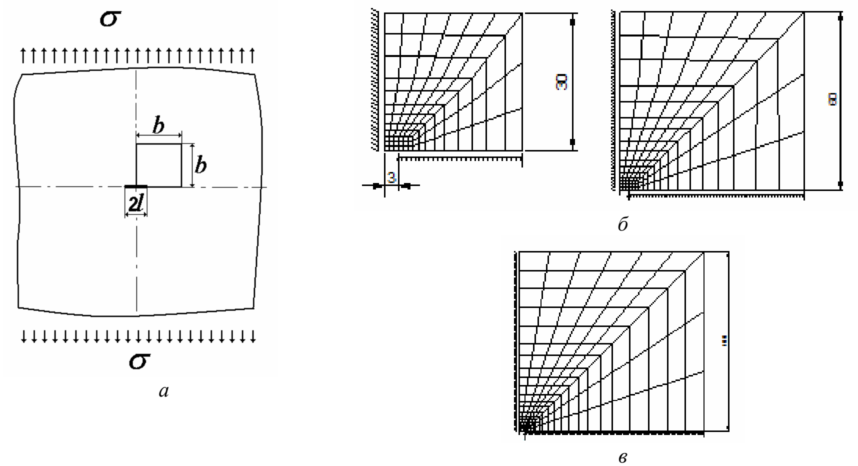

Рис. 3. Нескінчена пластина з центральною тріщиною (*а*) та її дискретні моделі (*б*,*в*)

Результати показали, що при розмірах *b*=100*мм* збіжність НДС досягнуто. На другому етапі було проведено дослідження збіжності за розмірами СЕ в привершинному фрагменті. Результати показали (рис. 5), що збіжність досягається при розмірах СЕ в 10 разів меншими від довжини тріщини (рис. 4).

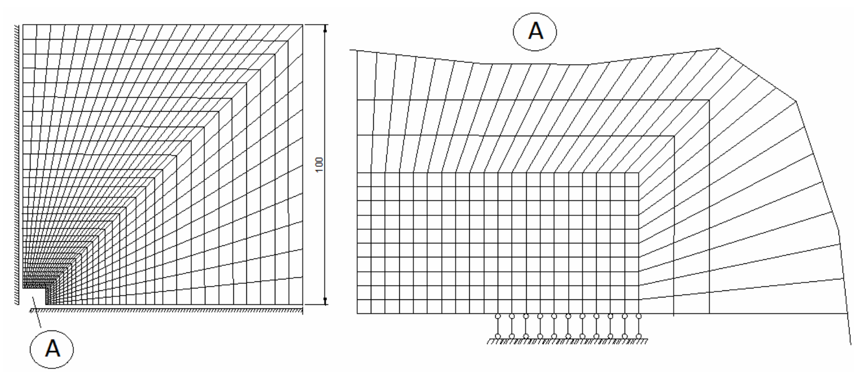

Рис. 4. Схема дискретної моделі, на якій досягнуто збіжність НДС

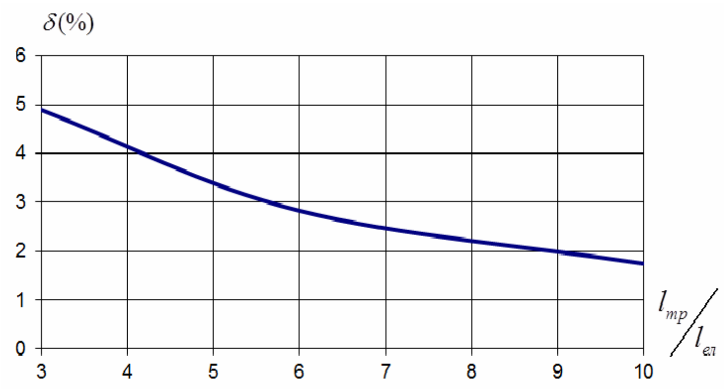

Рис. 5. Вплив розмірів СЕ на точність результатів

Обчислення параметра Гриффітца проводилось як по всій дискретній моделі (8), так і по замкнутому об'єму v різної розмірності, що охоплює вершину тріщини (11). Еталонне значення G визначене через коефіцієнт інтенсивності напружень, значення якого визначають за допомогою відомого виразу:

$$G_{em} = \frac{K_{em}^2}{E} = \frac{\left(\sigma\sqrt{\pi l}\right)^2}{E} = \frac{\left(1\frac{кг}{см^2}\sqrt{3.14\cdot 0.3см}\right)^2}{1\frac{кг}{см^2}} = 0.942\frac{кг}{см}.$$

Розглядалося три варіанта моделювання появи нової поверхні ΔS за рахунок зміни граничних умов: метод центральних різниць (рис. 6,*а*), різниць назад (рис. 6,*б*), різниць вперед (рис. 6,*в*).

Виявилось, що метод центральних різниць дозволяє з більшою точністю визначати параметр G. Результати обчислення G за формулою (10) та (11) для різних областей співпадають як між собою, так і з результатами отриманими за формулою (8) для всієї дискретної моделі.

Аналогічні результати отримані для тестової задачі про розтяг кінцевої пластини з центральною тріщиною (рис. 7). При дії розтягуючого поверхневого навантаження отримані значення $G_V = G_v = 24.52$.

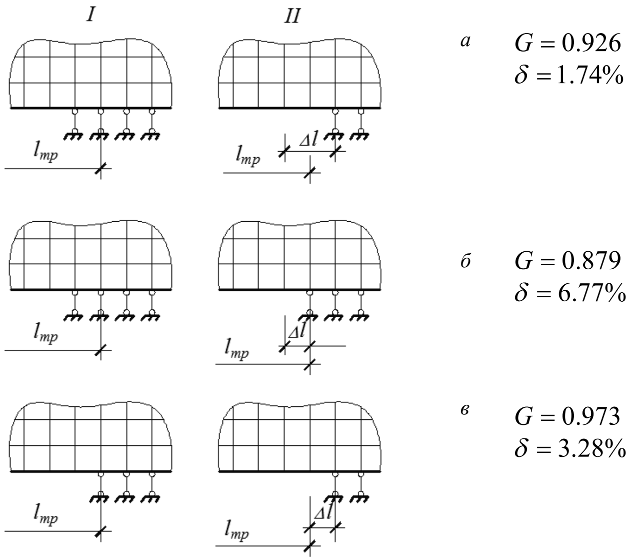

Рис. 6. Варіанти моделювання утворення нової поверхні тріщини

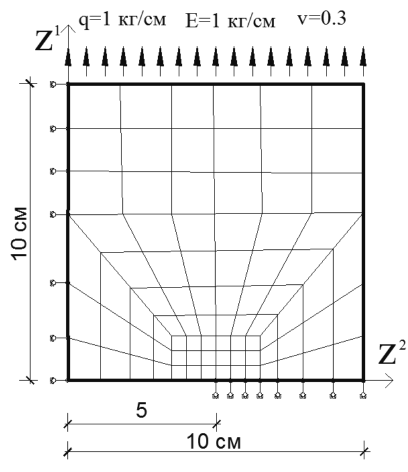

Рис. 7. Скінченна пластина з центральною тріщиною

Якщо крім поверхневого навантаження до пластини додатково прикласти об’ємні сили (наприклад, у вузлах 1, 2, 3, 4 будуть діяти сили

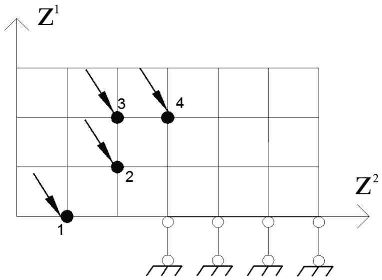

Рис. 8. Точки прикладання об’ємних сил

відповідно 2, 3, 4, 5 *кг* як вздовж Z^1 так і вздовж Z^2) (рис. 8), то параметр Гріффітца $G_V = G_v = 261.2$.

Таким чином, результати обчислення параметра G за формулами (10), (11) по привершинній області і за формулою (8) для всієї дискретної моделі співпадають. Причому ця властивість зберігається як при поверхневих, так і об’ємних силах.

4. Визначення параметра *G* в просторових тілах з тріщинами на основі НМСЕ. За допомогою виразів (8), (10), (11) визначається середня інтенсивність вивільнення пружної енергії при розвитку тріщини. В багатьох практичних задачах важливо знати також закон розподілу параметра G вздовж фронта тріщини (рис. 9). Аналітичні дослідження виконані в цьому напрямку показали, що біля фронту тріщини в пружному тілі напружено-деформований стан є близьким до плоского (тріщини першого і другого роду) або антиплоского (тріщини третього роду) деформованого стану [5, 6]. Звідси витікає можливість визначати параметр G незалежно в кожній точці фронта тріщини.

При чисельній реалізації такого підходу для визначення G поверхня ΔS ділиться вздовж фронта тріщини на m частин $\Delta S = \sum_{i=1}^{m} \Delta s^j$, кожна з яких Δs^i складається із примикаючих до тріщини СЕ (рис.9). Аналогічно об’єм v ділиться на локальні об’єми v^i . Тоді формулу визначення значень G_i (11) можна представити для окремих зон фронта тріщини із збереженням властивості інваріантності відносно розглядуваних об’ємів тіла:

$$G_i = \frac{1}{2\Delta s^i}\left(\left\{R^I_{v^i}\right\}^T\left\{u^{II}_{v^i}\right\} - \left\{R^{II}_{v^i}\right\}^T\left\{u^I_{v^i}\right\}\right). \tag{12}$$

При цьому значення G_i слід відносити до центрів ваги площин Δs^i .

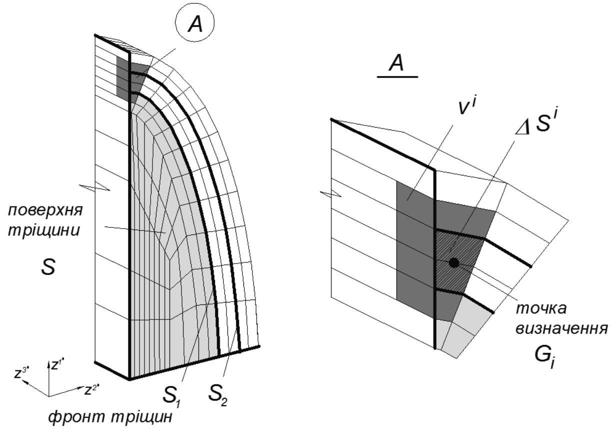

Рис. 9. Схема визначення G на основі НМСЕ в тілах з поперечними тріщинами

При поздовжніх тріщинах в НМСЕ точки визначення G_i співпадають з точками інтегрування СЕ (рис. 10). Поверхня Δs^j визначається пропорційно відстаням до сусідніх точок інтегрування.

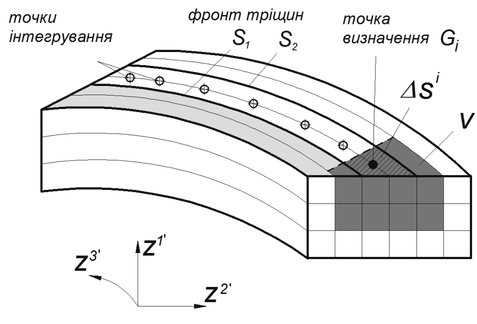

Рис. 10. Схема визначення G на основі НМСЕ в тілах з поздовжніми тріщинами

Апробація розробленої методики в просторових тілах проводилась на тестовій задачі з визначення G в призматичному тілі з боковим надрізом, що завантажене розподіленим вздовж грані навантаженням q=4300 *кг/см*^{2} (рис. 11). Оскільки розрахункова схема симетрична відносно площини фронту тріщини при СЕ дискретизації моделювання тріщини здійснювалось за допомогою граничних умов і розглядалася лише одна із поверхонь тріщини (рис. 11).

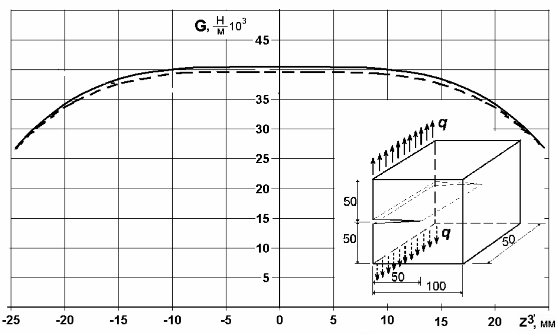

Рис. 11. Призматичне тіло з боковим надрізом

Розподіл *G*, отриманий за формулою (12) із застосуванням тривимірного МСЕ і НМСЕ, співпадає з результатами отриманими іншими методами в роботі [1].

Висновок. Таким чином, розроблений на основі метода реакцій метод визначення параметра *G* дозволяє з високою ефективністю оцінювати тріщиностійкість тіл з тріщинами.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Баженов В.А., Гуляр А.И., Пискунов С.О., Максимюк Ю.В., Шкрыль А.А.* Решение линейных и нелинейных пространственных задач механики разрушения на основе полуаналитического метода конечных элементов. Сообщение 2. Методика определения инвариантного J-интеграла в дискретных моделях МКЭ // Проблемы прочности. – 2011. – № 2.– С. 17–32.
2. *Баженов В.А., Гуляр А.И., Пискунов С.О., Сахаров А.С., Шкрыль А.А.* Метод определения инвариантного J-интеграла в конечно-элементных моделях призматических тел // Прикладная механика. 2008, 44, №12. – С. 70-82.
3. Баженов В.А., Гуляр О.І., Пискунов С.О., Шкриль О.О.Богдан Д.В Модифікований метод реакцій для визначення J-інтеграла в задачах пружнопластичного деформування просторових призматичнсих тіл //Опір матеріалів і теорія споруд: наук.-тех. збірн. – К.: КНУБА, 2011. – Вип. 88. – С. 18-23
4. *Броек Д.* Основы механики разрушения: Пер. с англ. – М.: Высш. шк., 1980. – 368 с.
5. *Морозов Е.М., Никишков Г.П.* Метод конечных элементов в механике разрушения. – М.: Наука, 2010. – 256 с.
6. *Черепанов Г.П.* Механика хрупкого разрушения. – М.: Наука, 1974. – 640с.
7. *Anderson T.L.* Fracture mechanics: Fundamentals and Applications, Third Edition.-CRC Press, 2005. - 640р.

REFERENCES

1. *Bazhenov V.A., Gulyar A.I., Piskunov S.O., Maksimyuk YU.V., Shkryl' A.A.* Resheniye lineynykh i nelineynykh prostranstvennykh zadach mekhaniki razrusheniya na osnove poluanaliticheskogo metoda konechnykh elementov.(linear and nonlinear spatial problems of fracture mechanics on the basis of a semi-analytic finite element method) Soobshcheniye 2. Metodika opredeleniya

invariantnogo J-integrala v diskretnykh modelyakh MKE(The method of determining the invariant J-integral in discrete models of FEM) / // Problemy prochnosti. – 2011. – № 2.– S. 17–32.

2. *Bazhenov V.A., Gulyar A.I., Piskunov S.O., Sakharov A.S., Shkryl' A.A.* Metod opredeleniya invariantnogo J-integrala v konechno-elementnykh modelyakh prizmaticheskikh tel(Method for determining the invariant J-integral in finite-element models of prismatic bodies) // Prikladnaya mekhanika. 2008, 44, №12– s.70-82.
3. *Bazhenov V.A., Gulyar O.Í., Piskunov S.O., Shkril' O.O.Bogdan D.V* Modifíkovaniy metod reaktsíy dlya viznachennya J-íntegrala v zadachakh pruzhnoplastichnogo deformuvannya prostorovikh prizmatichnsikh tíl (Modified reaction method for determination of J-integral in problems of elastoplastic deformation of spatial prismatic elements)//Opír materíalív í teoríya sporud: nauk.-tekh. zbírn. – K.: KNUBA, 2011. – Vip. 88. – S.18-23
4. *Broyek D.* Osnovy mekhaniki razrusheniya(Fundamentals of the mechanics of destruction): Per. s angl. – M.: Vyssh. shk., 1980. – 368 s.
5. *Morozov Ye.M., Nikishkov G.P.* Metod konechnykh elementov v mekhanike razrusheniya(The finite element method in fracture mechanics). – M.: “Nauka”, 2010. – 256 s.
6. *Cherepanov G.P.* Mekhanika khrupkogo razrusheniya(Mechanics of brittle fracture). – M.: Nauka, 1974. – 640s.
7. *Anderson T.L.* Fracture mechanics: Fundamentals and Applications, **T**hird Edition.-CRC Press, 2005. - 640p.

Shkril' A.

DEFINITION G BASED ON CALCULATION OF INVARIANT VOLUME INTEGRALS BY REACTION METHOD

Among the methods for determining the parameters of fracture mechanics on the basis of FEM the most widely used energy approaches. To date, numerous studies have been carried out to demonstrate the effectiveness of the reaction method in implementing the energy approach. However, in these studies, the question of determining the J-integral is considered. It is generally known that in the presence of bulk forces of different gauge, the J-integral can not be used to assess the crack resistance. Therefore, in this paper, a generalization of the reaction method is carried out to determine the Griffiths criterion, which allows us to assess the crack resistance under the influence of bulk forces of different nature.

In determining the work of external forces and the potential energy of deformation are determined by known formulas in terms of displacement. For this purpose, in discrete models, a spatial body with a crack in two equilibrium states is considered. The first state corresponds to the initial position of the crack, the second to the new position obtained with the growth of the crack for one step of the grid with the emergence of a new surface of the crack. Existing methods for calculating G in discrete models allocate a certain region around the crack front. Therefore, by analogy, the definition formula for a closed volume around a crack of arbitrary configuration was derived. With the invariance of the stiffness matrix of the volume fragment in both states under consideration, the definition formula acquires a simplified form. Approbation of the developed technique was carried out on the test problem of stretching an infinite plate with a central crack. The calculation was carried out both in the entire discrete model and in a closed volume of different dimensions, covering the peak of the crack. The obtained results of calculating the parameter in the complementary region and for the entire discrete model coincide. Moreover, this property is preserved both in surface and volumetric forces. Next, the scheme of application of the developed method for determining the parameter for three-dimensional problems based on the semi-analytic method of finite elements was considered. To test the scheme, a test task was performed on the definition of G in a prismatic body with a lateral incision loaded with load distributed along the face. Distribution G, obtained with the use of three-dimensional FEM and SFEM, coincides with the results obtained by other methods.

Keywords: semi-analytical finite element method, Griffitz parameter, reaction method.

Шкрыль А.А.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ *G* НА ОСНОВЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ ИНВАРИАНТНЫХ ОБЪЕМНЫХ ИНТЕГРАЛОВ МЕТОДОМ РЕАКЦИЙ

На основе вычисления инвариантных объемных интегралов методом реакций, разработан метод определения параметра Гриффитца G в дискретных моделях метода конечных элементов (МКЭ). Решены тестовые задачи. Полученные результаты подтверждают эффективность методики.

Ключевые слова: полуаналитического метод конечных элементов, параметр Гриффитца, метод реакций.

УДК 539.3

Шкриль О.О. **Визначення G на основі обчислення інваріантних об'ємних інтегралів методом реакцій** // Опір матеріалів і теорія споруд. – 2017. – Вип. 98. – С. 31-42.

На основі обчислення інваріантних об'ємних інтегралів методом реакцій, розроблено метод визначення параметра Гріффітца *G* в дискретних моделях методу скінченних елементів (МСЕ). Розв'язані тестові задачі. Отримані результати підтверджують ефективність методики.

Табл. 0 Іл. 11 Бібліогр. 7

Shkril' A. **Definition on G based on calculation of invariant volume integrals by reaction method** // Strength of Materials and Theory of Structures. – 2017. – Issue. 98. – P. 31-42.

On the basis of the calculation of invariant volume integrals by the reaction method, a method for determining the Griffiths parameter G in discrete models of the finite element method is developed. Solved test tasks. The obtained results confirm the effectiveness of the technique.

Table 0. Fig. 11. Ref. 7

Шкрыль А.А. **Определение G на основе вычисления инвариантных об'емных интегралов методом реакций** // Сопротивление материалов и теория сооружений. – 2017. – Вып. 98. – С. 31-42.

На основе вычисления инвариантных объемных интегралов методом реакций, разработан метод определения параметра Гриффитца G в дискретных моделях метода конечных элементов (МКЭ). Решены тестовые задачи. Полученные результаты подтверждают эффективность методики

Табл. 0 Іл. 11 Бібліогр. 7

Автор (науковий ступінь, вчене звання, посада): *доцент, кандидат технічних наук, докторант кафедри будівельної механіки КНУБА Шкриль Олексій Олександрович.*

Адреса робоча: *03680 Україна, м. Київ, Повітрофлотський проспект 31, Київський національний університет будівництва і архітектури, кафедра будівельної механіки, Шкрилю Олексію Олександровичу .*

Адреса домашня: 08132*, Україна, м. Вишневе, вул. Г. Сковороди 10, кв. 24*

Робочий тел.: *+38(044) 245-55-55;*

Мбільний тел.: *+38(050) 307-61-49.*

E-mail: alexniism@ukr.net