УДК 539.3

АНАЛІЗ ВЛАСНИХ КОЛИВАНЬ ОБОЛОНОК НЕОДНОРІДНОЇ СТРУКТУРИ З ВИКОРИСТАННЯМ РЕДУКОВАНОЇ СКІНЧЕННОЕЛЕМЕНТНОЇ МОДЕЛІ

О.П. Кривенко[1],
канд. техн. наук

А.Д. Легостаєв[1],
канд. техн. наук

Н.А. Гречух[1]

[1]*Київский національний університет будівництва і архітектури*
Повітрофлотський просп., 31, м. Київ. 03680

Запропоновано алгоритм дослідження динамічних характеристик неоднорідних оболонок з використанням редукованої скінченно-елементної моделі, що побудована за методом базисних вузлів. Ефективність розробленого методу продемонстровано на прикладі визначення власних коливань циліндричної консольної панелі.

Ключові слова: тонка пружна оболонка неоднорідної структури, універсальний скінченний елемент, редукована модель, коливання.

Вступ. Вивчення динамічної поведінки конструкцій має важливе значення для проектування будівельних конструкцій, енергетичного обладнання, авіаційної техніки та інше. Особливо це стосується оболонкових конструкцій, які за умов малої маси і великої жорсткості є чутливими до дії динамічних навантажень навіть невеликої інтенсивності.

До теперішнього часу є безліч публікацій, присвячених розрахунку різноманітних оболонкових систем, кількість яких за останнє десятиріччя значно зросла [1-31]. Серед них велика увага приділена вивченню пружних оболонок ступінчасто-змінної товщини. Незважаючи на інтенсивні дослідження, що проводяться в останні роки, залишається ще багато нез’ясованих питань і невирішених проблем в області вивчення поведінки оболонкових конструкцій при динамічному навантаженні.

Постановка задачі. В останній час основним засобом вивчення поведінки різних оболонкових конструкцій при дії динамічних навантажень стало чисельне математичне моделювання. Застосування методу скінченних елементів щодо розв’язання таких задач потребує створення дискретних моделей з великим числом степенів вільності для забезпечення достовірної апроксимації геометричних і фізичних характеристик моделей. Стосовно задач про власні коливання оболонкових конструкцій, які є невід'ємною складовою частиною задач динаміки, практичну цінність має лише частина спектру власних коливань, починаючи з нижчих частот. У зв'язку з цим виникає потреба у побудові редукованих моделей, число степенів вільності яких істотно менше аніж вихідної дискретній скінченно-елементної моделі оболонки (СЕМО), але при цьому нижча частина спектра власних частот вихідної і редукованої моделей збігаються.

Для оболонок тонких, середньої та ступінчасто-змінної товщини має сенс використовувати універсальні СЕ, співвідношення для яких побудовані на основі загально визнаної моментої схеми скінченних елементів [19]. Метою роботи є застосування в існуючій скінченно-елементній методиці розрахунку неоднорідних оболонок, яка спирається на використання універсального просторового СЕ з додатковими змінними параметрами [1-2], методу базисних вузлів [22] для отримання редукованих розв'язувальних рівнянь динаміки оболонок неоднорідної структури. Ефективність розробленого методу доведена на класичному тестовому прикладі – визначення власних коливань циліндричної консольної панелі.

Вихідні положення та постановка задачі. Тонкі неоднорідні оболонки розглядаються у роботі з позицій просторової теорії пружності з використанням апарата тензорного числення [1-2]. Під неоднорідністю оболонки розуміється: 1) наявність геометричних особливостей за товщиною оболонки у вигляді ділянок ступінчасто-змінної та гладко-змінної товщини зі зломами серединної поверхні та отворами; 2) різні умови закріплення контуру на різних ділянках оболонки.

Побудова рівнянь руху виконується на основі принципу можливих переміщень у поєднанні з принципом Даламбера [5, 7, 19-20]. Згідно з цим принципом рух системи з ідеальними в'язями відбувається так, що в будь-який момент часу сума робіт усіх активних сил і сил інерції на можливих переміщеннях дорівнює нулю.

Для суцільного середовища, модель якого приймається за базову, сили інерції є масовими силами, які дорівнюють за величиною добутку густини матеріалу на прискорення точки. Таким чином, сили інерції можуть бути визначені як вектор

$$\left\{Q^{in}\right\} = -\rho\left\{\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right\} = -\frac{\gamma}{g}\left\{\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right\},$$

де ρ – питома густина, γ – питома вага, g – прискорення вільного падіння.

Після додавання сил інерції до масових сил отримаємо вихідне варіаційне рівняння для дослідження динамічного деформування, яке при скінченно-елементній апроксимації має вигляд

$$\sum_{FE}\left(\delta W_{FE}-\left(\delta T_{FE}+\delta A_{FE}\right)\right)=0\,, \tag{1}$$

де T_{FE}, W_{FE} та A_{FE} – робота сил інерції, внутрішніх і зовнішніх сил СЕ, відповідно; $\sum\limits_{FE}$ – сума за скінченними елементами СЕМО.

Співвідношення для обчислення віртуальної роботи внутрішніх сил СЕ $\delta W_{FE}=\int_{V_{FE}}\sigma^{ij}\delta\overset{e}{\varepsilon}_{ij}dV_{FE}$ та поверхневих і масових зовнішніх активних сил, що віднесені до вузлів СЕ $\delta A_{FE}=\int_{V_{FE}}P^{i'}\delta u^{i'}dV_{FE}$, для багатошарового скінченного елемента наведено в [1-2]. У задачах статики δW_{FE} фігурує як мінімізований функціонал. З нього після лінеаризації отримується матриця жорсткості СЕ $[K]_{FE}$.

Віртуальну роботу сил інерції СЕ визначаємо як

$$\delta T_{FE}=-\int\limits_{V_{FE}}\rho\frac{\partial^2 u^{i'}}{\partial t^2}\delta u^{i'}dV_{FE}=-\int\limits_{V_{FE}}\rho\ddot{u}^{i'}\delta u^{i'}\,dV_{FE}\,, \tag{2}$$

де вузлові переміщення $u^{i'}$ є функціями часу. З (2) отримується матриця мас СЕ $[M]_{FE}$, яка характеризує інерційні властивості елемента. Визначення матриці мас багатошарового СЕ наведено в [21].

Для побудови СЕМО конструкції застосовано розроблений в [1-2] модифікований (універсальний) просторовий СЕ з полілінійними функціями форми, використання якого поширено на задачі динаміки. Метод [1-2] ґрунтується на співвідношеннях тривимірної теорії термопружності, скінченно-елементному формулюванні задачі у приростах і використанні моментної схеми скінченних елементів. Метод призначений для чисельного дослідження статичних процесів геометрично нелінійного деформування, втрати стійкості та закритичної поведінки широкого класу тонких неоднорідних оболонок, що знаходяться в умовах складного термосилового навантаження. При розробці методу використана модель лінійно-пружного суцільного середовища, властивості якого відповідають узагальненому закону Дюамеля–Неймана, при великих переміщеннях і малих деформаціях. Розроблено просторовий модифікований (універсальний) скінченний елемент з додатковими змінними параметрами, на базі якого створена єдина розрахункова модель, що враховує геометричні особливості конструктивних елементів та неоднорідності матеріалу тонкої оболонки: змінність товщини, злами і гранованість обшивки, ребра, накладки, виїмки, отвори, вставки, багатошарову структуру матеріалу.

Достовірність методу [1-2] підтверджена чисельними дослідженнями збіжності та точності розв’язків для різних класів пружних неоднорідних оболонок.

Процедура інтегрування та лінеаризації рівняння (1) здійснюється звичним для МСЕ чином. У результаті отримуємо розв’язувальну систему рівнянь у вигляді системи звичайних диференціальних рівнянь другого порядку

$$[M]\{{}^t\ddot{u}\}+[K]\{{}^t u\}-\{{}^t P\}=0\,, \tag{3}$$

де $\{u\}$, $\{\ddot{u}\}$ – N-вимірні вектори узагальнених переміщень і прискорень вузлів дискретної моделі конструкції (N – загальне число степенів вільності моделі); $[M]$ – матриця мас усієї моделі конструкції, яка характеризує інерційні властивості оболонки; $[K]$ – матриця жорсткості СЕМО; $\{P\}$ – вектор узагальнених вузлових сил; верхній лівий значок « t » показує залежність векторів від часу.

Для того щоб розв’язок системи (3) мав сенс, необхідно задати початкові умови, які повинні визначати у початковий момент часу (без втрати загальності – у нульовий момент часу) поле переміщень $\{{}^0u\}$ і швидкостей $\{{}^0\dot{u}\}$, тобто

$$\{{}^t u\}\big|_{t=t_0}=\{{}^0u\},\;\; \{{}^t\dot{u}(t)\}\big|_{t=t_0}=\{{}^0\dot{u}\}. \tag{4}$$

Побудова розв’язувальних рівнянь для редукованої моделі СЕМО за методом базисних вузлів. Для випадку конструкцій регулярної структури створено алгоритми [20, 32], що реалізують процес ітерацій з деякою частиною власних векторів зі спектру власних коливань вихідної дискретної моделі при забезпеченні щільності нижчої частини спектру. У процесі ітерацій забезпечуються умови ортогональності власних векторів, кількість яких заздалегідь призначено. Ці вектори утворюють своєрідний підпростір. Розмірність векторів, що його складають, відповідає числу степенів вільності вихідної дискретної моделі. Таким чином, задача щодо власних коливань реалізується без зменшення просторової апроксимації області, що рухається. Число ітерацій залежить від початкового значення власних векторів. Процес швидко завершується, якщо наближені значення векторів початкового етапу ітерацій є достатньо близькими до реальних значень власних векторів, що необхідно визначити.

Для забезпечення зазначеної умови щодо початкового значення власних векторів, побудуємо наближені вектори власних коливань за методом базисних вузлів [22, 23], який не пов’язаний зі способом дискретизації вихідної задачі. У даній роботі метод набув розвитку стосовно скінченно-елементної моделі оболонкової конструкції неоднорідної структури. Суть методу полягає у наступному.

При використанні в (3) функцій переміщень $\{u\}$ як розв'язувальних, будується редукована модель вихідної дискретної моделі, число степенів вільності якої Ω відповідає числу переміщень деякої сукупності вузлів (за вибраними напрямками) з повного набору СЕМО. Переміщення цих вузлів будемо називати новими узагальненими координатами $\{q\}$, а вибрані вузли – базисними (або опорними) вузлами редукованої СЕМО. Отже, зв'язок між невідомими переміщеннями вихідної СЕМО $\{u\}$ та новими невідомими – узагальненими координатами редукованої СЕМО $\{q\}$, визначається за формулою

$$\left\{{}^{t}u^{k}\right\}=\left[U_{kr}\right]\left\{{}^{t}q^{r}\right\}, \qquad k=\overline{1,N}, \quad r=\overline{1,\Omega}, \tag{5}$$

де $\left\{{}^{t}u\right\}$ – вектор переміщень вихідної СЕМО; $\left\{{}^{t}q\right\}$ – вектор нових узагальнених координат редукованої СЕМО; $[U]$ – матриця перетворень; N і Ω – число степенів вільності вихідної та редукованої моделей.

Згідно з методом [22, 23] компонентами матриці $[U]$ є так звані базисні вектори. Переміщення базисних вузлів редукованої моделі повинні бути можливими та незалежними. Забезпечення лінійної незалежності нових узагальнених координат реалізується за допомогою накладання абсолютно жорстких в'язей за напрямком переміщень базисних вузлів. Зазначимо, що СЕМО з додатковими в'язями у виділеній сукупності вузлів схожа по суті з основною системою класичного методу переміщень, який використовується для розрахунку стержневих конструкцій.

Побудова базисних векторів виконується шляхом розв'язання основної системи на змушені одиничні переміщення накладених в'язей у базисних вузлах моделі. Тобто алгоритм побудови базисних векторів ґрунтується на розв'язанні лінійної системи алгебраїчних рівнянь МСЕ, що складена для дискретної моделі фрагмента з накладеними в'язями від одиничних змушених зміщень у напрямку можливих переміщень вузлів, що прийняті за нові узагальнені координати цієї редукованої моделі.

Число компонент базисних векторів, що входять до складу матриці перетворень $[U]$ у (5), збігається з числом степенів вільності СЕМО конструкції. Отже, кількість рядків матриці перетворень $[U]$ дорівнює числу степенів вільності вихідної СЕМО N, а кількість стовпчиків – кількості узагальнених координат редукованої моделі Ω. Таким чином, побудова редукованої моделі виконується без погіршення просторової апроксимації вихідної СЕМО.

Рівняння руху редукованої моделі отримується шляхом підстановки змінних (5) у рівняння руху (3)

$$\left[\widetilde{M}\right]\left\{{}^{t}\ddot{q}\right\}+\left[\widetilde{K}\right]\left\{{}^{t}q\right\}-\left\{{}^{t}\widetilde{P}\right\}=0\,, \tag{6}$$

де

$$\left[\widetilde{M}\right]=[U]^{T}[M][U]\,, \tag{7}$$

$$\left[\widetilde{K}\right]=[U]^{T}[K][U]\,, \tag{8}$$

$$\left\{{}^{t}\widetilde{P}\right\}=[U]^{T}\left\{{}^{t}P\right\}, \tag{9}$$

– відповідно матриці мас і жорсткості, які характеризують рух редукованої моделі, та вектор узагальнених сил для нової моделі. Правий верхній значок «*T*» означає транспоновану матрицю.

Відповідно до (4) невідомі шукані функції $\left\{{}^{t}q\right\}$ мають задовольняти початковим умовам при $t=t_0$

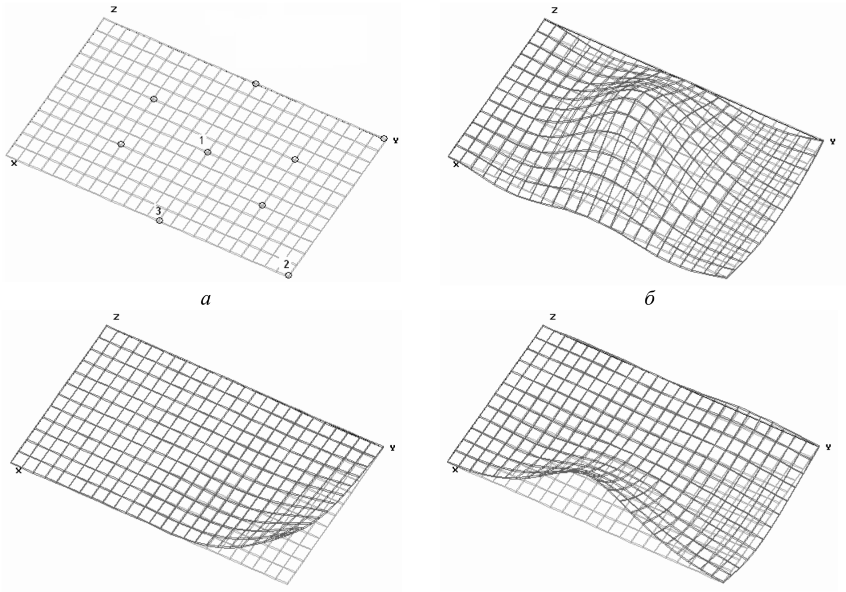
$$\left\{{}^{t=t_0}q\right\}=\left\{{}^{t_0}q\right\},\qquad \left\{{}^{t=t_0}\dot{q}\right\}=\left\{{}^{t_0}\dot{q}\right\}, \tag{10}$$

або, не втрачаючи загальності, при $t=0$

$$\left\{{}^{t=0}q\right\}=\left\{{}^{0}q\right\},\qquad \left\{{}^{t=0}\dot{q}\right\}=\left\{{}^{0}\dot{q}\right\}. \tag{10’}$$

На рис. 1 на прикладі трьох базисних вузлів показано вигляд базисних векторів для вибраної системи базисних вузлів. Тут (*а*) прийнята схема базисних вузлів, (*б*) – перший базисний вектор, (*в*) – другий базисний вектор, (*г*) – третій базисний вектор. Інші базисні вектори визначаються за аналогічною схемою.

Слід відзначити, що застосування методу базисних вузлів до задач динаміки оболонкових конструкцій є ефективним інструментом, який дає змогу в рамках єдиного алгоритму істотно розширити можливості метода переміщень при побудові розв’язків задачі методом скінченних елементів. Цей факт буде застосовано у подальшому при дослідження нестаціонарних коливань оболонок від дії ударних та імпульсних навантажень.



а *б*

в *г*

Рис. 1

Результати розрахунку вільних коливань циліндричної панелі за методом базисних вузлів та аналіз розв'язків. Розглядається тестова задача про коливання консольної циліндричної панелі (рис. 2). Оболонка жорстко закріплена по криволінійному контуру. Постановка задачі та вихідні данні взяті з роботи [7]. Уперше експериментально та чисельно ця задача була досліджена в роботах [24, 25]. Надалі задача використовувалася дослідниками для тестової апробації різних скінченних елементів у задачах динаміки.

Вихідними геометричними даними є: розмір панелі у плані $L = S = 0{,}3048\,м$, радіус кривизни $R = 0{,}6096\,м$, товщина панелі $h = 0{,}003048\,м$; характеристики матеріалу такі: модуль пружності $E = 0{,}2 \cdot 10^{12}$ $Н/м^2$, коефіцієнт Пуассона $\nu = 0{,}3$, питома густина $\rho = 0{,}704 \cdot 10^4$ $кг/м^3$.

Результати розрахунків та їх аналіз подані у вигляді табл. 1-3 та рис. 3. Спочатку задача була розв'язана методом ітерації підпростору (МІП), як найбільш розробленого і апробованого, для нередукованої СЕМО з метою аналізу та подальших порівнянь розв'язків, отриманих за методом базисних вузлів, та оцінки їхньої точності.

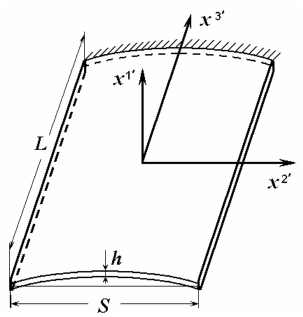


Рис. 2

У табл. 1 наведено збіжність розв’язків задачі для восьми нижчих частот, що отримані за МІП. Порівняння виконано з розв’язком при сітці 30×30 СЕ. Видно, що для розглядуваних частот гарний результат дає використання рідкої сітки 10×10 СЕ. Для СЕМО з розбиттям 15×15 СЕ різниця не перевищує 2%, а для сітки 20×20 СЕ – 0,78%.

Таблиця 1

Збіжність розв’язків для консольної циліндричної панелі за методом ітерацій підпростору для нередукованої СЕМО

№	СЕМО – СЕ						
	10×10, Гц	Δ, %	15×15, Гц	Δ, %	20×20, Гц	Δ, %	30×30,Гц
1	90,229	0,82	89,839	0,38	89,658	0,005	89,494
2	146,08	0,75	145,50	0,35	145,23	0,16	144,99
3	260,86	1,85	257,96	0,72	256,91	0,31	256,11
4	365,73	2,21	361,13	0,92	359,28	0,41	357,82
5	407,09	1,66	403,32	0,72	401,74	0,32	400,45
6	570,28	5,23	552,05	1,86	546,17	0,78	541,92
7	790,99	4,28	772,56	1,83	764,56	0,78	758,65
8	794,19	4,25	773,31	1,51	766,68	0,64	761,78

У табл. 2, 3 наведено збіжність розв’язків задачі, що отримані методом базисних вузлів, для вихідної СЕМО з сітками 20×20 і 30×30 СЕ. Порівняння виконано з відповідним розв’язком, що знайдено при використанні методу ітерацій підпростору (табл. 1). Аналіз збіжності виконано за кількістю базисних вузлів (БВ). Оскільки задана кількість базисних вузлів визначає степінь вільності редукованої СЕМО, тому отримані результати демонструють ефективність розробленого методу.

1. Для нередукованої СЕМО з сіткою 20×20 СЕ використання лише 12 БВ для побудови редукованої моделі дає похибку меншу за 10% при визначенні п’яти перших частот, збільшення кількості базисних вузлів до 20 дозволяє значно підвищити точність знаходження спектру з 8 нижчих частот.

2. Для сітки 30×30 СЕ збільшення кількості базисних вузлів з 20 до 30 дозволяє визначити частоти з достатньою точністю.

3. Для отримання усього заданого спектру нижчих частот із задовільною точністю збільшення вихідної сітки нередукованої СЕМО вимагає збільшення кількості БВ, що можна пояснити необхідністю нанесення вибраного каркасу БВ, яка б рівномірно охоплювала усю СЕМО.

Таблиця 2

Збіжність розв'язків за кількістю базисних вузлів при сітці 20×20 СЕ за методом базисних вузлів

№	СЕМО – 20×20 СЕ						
	12 БВ, Гц	Δ, %	16 БВ, Гц	Δ, %	20 БВ, Гц	Δ, %	МІП, Гц
1	90,153	0,55	89,850	0,21	89,809	0,17	89,658
2	147,18	1,34	146,04	0,56	145,84	0,42	145,23
3	268,00	4,32	263,79	2,68	259,58	1,04	256,91
4	380,71	5,96	373,96	4,09	367,91	2,40	359,28
5	433,42	7,88	420,75	4,73	414,52	3,18	401,74
6	616,37	12,85	580,31	6,25	568,21	4,03	546,17
7	938,02	22,69	842,61	10,21	827,73	8,26	764,56
8	962,32	25,52	853,75	11,36	828,27	8,03	766,68

Таблиця 3

Збіжність розв'язків за кількістю базисних вузлів при сітці 30×30 СЕ за методом базисних вузлів

№	СЕМО – 30×30 СЕ								
	12 БВ, Гц	Δ, %	16 БВ, Гц	Δ, %	20 БВ, Гц	Δ, %	30 БВ, Гц	Δ %	МІП, Гц
1	90,241	0,83	90,237	0,83	89,547	0,06	89,547	0,06	89,494
2	147,55	1,77	147,47	1,71	147,18	1,51	145,20	0,14	144,99
3	262,60	2,53	259,28	1,24	258,79	1,05	257,60	0,58	256,11
4	395,48	10,53	389,06	8,73	380,66	6,38	361,80	1,11	357,82
5	437,32	9,21	428,25	6,94	421,33	5,21	406,06	1,40	400,45
6	604,73	11,59	603,60	11,38	600,38	10,79	556,80	2,75	541,92
7	918,74	21,10	874,63	15,29	830,63	9,49	789,31	4,04	758,65
8	1060,2	39,17	1004,3	31,83	870,24	14,24	826,87	8,54	761,78

У табл. 4 поряд з даними експерименту [24, 25], результатами розрахунків, отриманих у [7], і авторами за МССЕ наводяться результати для п’яти власних частот, що отримані в роботах інших авторів [24-31], посилання за роботою [7]. Видно, що розрахунки, які отримані авторами за МССЕ, добре узгоджуються з результатами експерименту та даними інших авторів.

Таблиця 4

Порівняння розв’язків, що отримані різними авторами

№ тону	Експеримент [24, 25], Гц	сітка 20×20 [7], Гц	сітка 30×30 [7], Гц	сітка 30×30 [МССЕ], Гц
1	85,60	89,5	91,8	89,494
2	134,50	144	149	144,99
3	258,90	258	273	256,11
4	350,60	359	388	357,82
5	395,20	406		400,45
№ тону	G. Lindberg M. Olson [24], Гц	G. Lindberg M. Olson [25], Гц	М.Н. Серазутдінов [26], Гц	M.A. Bossak, O.C. Zienkiewicz [27], Гц
1	93,50	86,60	83,40	88,30
2	147,60	139,20	133,80	142,80
3	255,10	251,30	238,10	257,60
4	393,10	348,60	334,00	369,20
5	423,50	393,40	377,00	441,80
№ тону	Я.Г. Савула [28], Гц	S. Ahmad та ін., [29], Гц	R.P. Wa1ker [30], Гц	С.І. Богомолов та ін. [31], Гц
1	85,10	113,00	88,60	84,90
2	138,00	147,00	140,90	138,20
3	251,70	296,00	252,60	248,70
4	344,80	440,00	371,50	349,90
5	404,90	475,00	423,20	419,10

Отримані власні форми коливань (рис. 3) збігаються з відповідними формами, що наведені в роботі [7]. Форми, що відповідають першим восьми частотам власних коливань панелі, представлені для СЕМО з сіткою 20×20 СЕ. Для кожної форми нижній правий край є жорстко затиснутим.

Висновки. На базі модифікованого ізопараметричного просторового скінченного елемента з полілінійними функціями форми розроблено скінченно-елементний метод визначення власних коливань оболонок неоднорідної структури. Алгоритм визначення частот і форм коливань оболонки побудовано на базі розробленого методу дослідження оболонок з геометричними особливостями за товщиною та застосуванні редукованих моделей, що будуються за методом базисних вузлів.

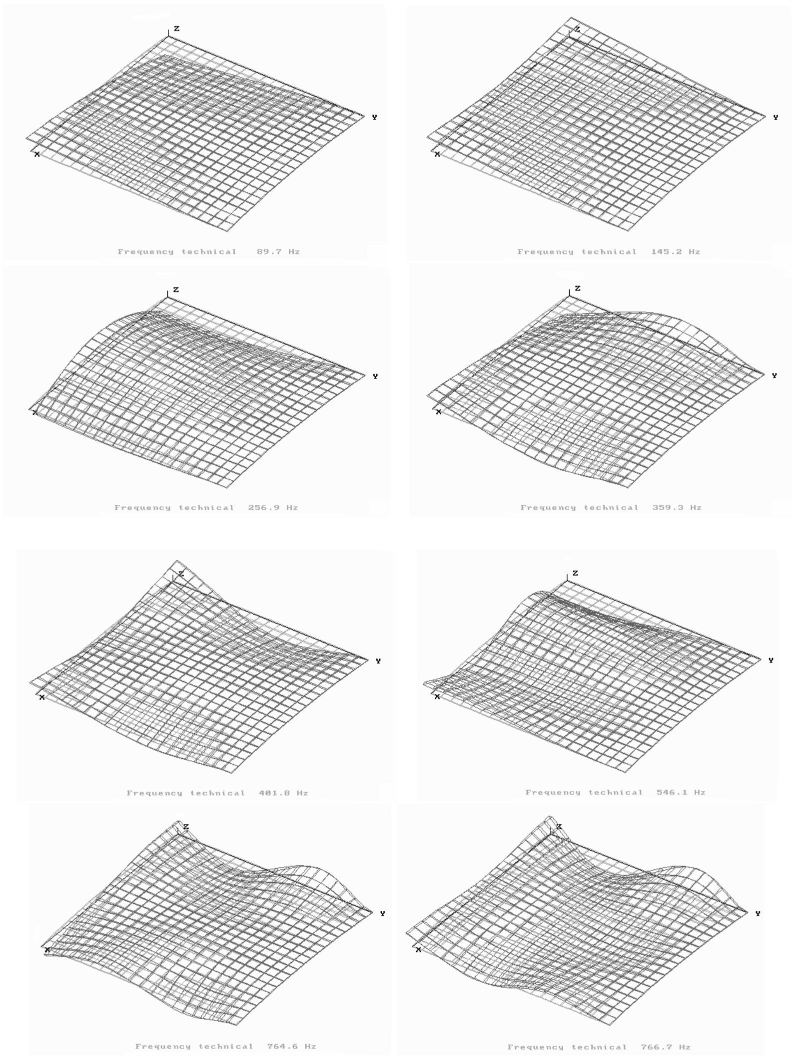


Рис. 3

На прикладі тонкої консольної циліндричної панелі досліджено збіжність розв'язків та проведено порівняння з результатами, отриманими експериментально та іншими авторами.

Проведені дослідження дозволили на прикладі консольної циліндричної панелі виявити особливості побудови редукованої моделі за методом базисних вузлів – вибір кількості та каркасу базисних вузлів.

Показано, що застосування методу базисних вузлів до задач динаміки оболонкових конструкцій є ефективним інструментом, який дає змогу в рамках єдиного алгоритму істотно розширити можливості метода переміщень при побудові розв'язків задачі методом скінченних елементів. Розроблений метод може бути застосовано в методі ітерацій підпростору як спосіб задавання достатньо близьких до реальних значень власних векторів для початкового етапу ітерацій зазначеного методу з метою пришвидшення його роботи.

Крім того, метод базисних вузлів може бути застосований самостійно для наближеної оцінки розв'язків щодо нестаціонарних коливань оболонкових конструкцій. Тому наступним етапом роботи є застосування методу базисних вузлів для розробки методу дослідження поведінки тонких оболонок неоднорідної структури при дії короткочасного навантаження типу імпульсного.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Баженов В.А., Кривенко О.П., Соловей М.О.* Нелінійне деформування та стійкість пружних оболонок неоднорідної структури. – К.: ЗАТ «Віпол», 2010. – 316 с.
2. *Баженов В.А., Кривенко О.П., Соловей Н.А.* Нелинейное деформирование и устойчивость упругих оболочек неоднородной структуры: Модели, методы, алгоритмы, малоизученные и новые задачи. – М.: Книжный дом «ЛИБРИКОМ», 2013. – 336 с.
3. *Баженов В.А., Кривенко О.П., Легостаєв А.Д.* Стійкість і власні коливання неоднорідних оболонок з урахуванням напруженого стану // Опір матеріалів і теорія споруд: наук.-тех. збірн. – К.: КНУБА, 2015. – Вип. 95. – С. 96-113.
4. *Кривенко О.П.* Вплив нагріву на стійкість і власні коливання сферичної панелі при зміні умов комбінованого закріплення контуру // Опір матеріалів і теорія споруд: наук.-тех. збірн. – К.: КНУБА, 2015. – Вип. 96. – С. 48-65.
5. *Агапов В.П.* Метод конечных элементов в статике, динамике и устойчивости пространственных тонкостенных подкрепленных конструкций. – Учебное пособие / М : Изд. АСВ, 2000. – 152 с.
6. *Якушев В.Л.* Нелинейные деформации и устойчивость тонких оболочек. - М.: Наука, 2004. – 276 с.
7. *Голованов А.И., Тюленева О.Н., Шигабутдинов А.Ф.* Метод конечных элементов в статике и динамике тонкостенных конструкций. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2006. – 392 с.
8. 8. *Reddy J.N.* Theory and Analysis of Elastic Plates and Shells, Second Edition – CRC Press, 2006. – 568 p.
9. *Кукуджанов С.Н.* Колебания и динамическая устойчивость оболочек вращения, близких к цилиндрическим, находящихся под действием нормального давления и меридиональных усилий // Известия РАН. Механика твердого тела, 2006. – №2. – С. 48-59.

10. *Amabili M.* Nonlinear vibrations and stability of shells and plates. – Cambridge: Cambridge University Press, 2008. – 374 p.
11. *Zarutskii V.A., Lugovoi P.Z., Meish V.F.* Dynamic problems for and stress–strain state of inhomogeneous shell structures under stationary and nonstationary loads // International Applied Mechanics, 2009. – Vol 45, № 3. – Pp. 245-271.
12. *Карпов В.В.* Прочность и устойчивость подкрепленных оболочек вращения. В 2-х ч. Ч.1. Модели и алгоритмы исследования прочности и устойчивости подкрепленных оболочек вращения. ФИЗМАТЛИТ, 2010. – 288 с.; Ч.2. Вычислительный эксперимент при статическом механическом воздействии. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2011. – 248 с.
13. *Жгутов В.М.* Математическое и компьютерное моделирование нелинейных свободных колебаний упругих пологих оболочек ступенчато-переменной толщины // Инженерно-строительный журнал, 2010. – №4. – С. 38-48.
14. *Chapelle D., Bathe K.J.* The finite element analysis of shells – Fundamentals. Series: Computational fluid and solid mechanics. – Berlin; Heidelberg: Springer, 2011. – 410 p.
15. *Gavrilenko G.D., Matsner V.I., Kutenkova O.A.* Dent and thickness effects on the critical loads of stiffened shells // Strength of Materials, 2011. – Vol. 43, No. 3. – Pp. 347-351.
16. *Николаев А.П., Клочков Ю.В., Киселев А.П., Гуреева Н.А.* Векторная интерполяция полей перемещений в конечно-элементных расчетах оболочек: монография – Волгоград: ФГБОУ ВПО Волгоградский ГАУ, 2012. – 264 с.
17. *Ghanbari Ghazijahani T., Showkati H.* Locally imperfect conical shells under uniform external pressure // Strength of Materials, 2013. – Vol., No. 3. – Pp. 369-377.
18. *Вольмир А.С.* Нелинейная динамика пластинок и оболочек. – М.: Наука, 1972. – 432 с.
19. Метод конечных элементов в механике твердых тел / *А.С. Сахаров, В.Н. Кислоокий, В.В. Киричевский и др.* – К.: Вища шк. Голов. изд-во, 1982. – 480 с.
20. *Баженов В.А.* Варіаційні принципи і методи будівельної механіки: Підручник. – Київ: Каравела, 2012. – 720 с.
21. *Баженов В.А., Кривенко О.П., Соловей М.О.* Матриця мас модифікованого просторового скінченного елемента неоднорідної оболонки // Опір матеріалів і теорія споруд: наук.-тех. збірн. – К.: КНУБА, 2013. – Вип. 91. – С. 114-125.
22. *Кислоокий В.Н., Легостаев А.Д.* Реализация метода конечных элементов в задачах исследования свободных колебаний оболочек и пластин //Опір матеріалів і теорія споруд, – Київ: Будівельник, 1974. – Вип. 27. – С. 24-32.
23. Легостаєв А.Д, Гречух Н.А. Деякі задачі динаміки оболонкових конструкцій // Опір матеріалів і теорія споруд: наук.-тех. збірн. – К.: КНУБА, 2012. – Вип. 89. – С. 78-86.
24. *Cowep G.R., Lindberg G.M., Olson M.D.* A shallow shell finite element of triangular shape // Int. J. Solids and Structures, 1970. – V.6, №8. – P. 1133-1156.
25. *Olson M.D., Linberg G.M.* Vibration analysis of cantilever plates, using a new cylindrical shell finite elements // Pros of 2nd Conf. math. strut. mech., AF base Wright. Peterson. Otto, 1968. – P. 247-269.
26. *Серазутдинов М.Н.* Статика и динамика тонкостенных элементов конструкций сложной геометрии //Дисс. на соискание ученой степени доктора физ. мат наук.
27. *Bossak M.A., Zienkiewicz O.C.* Free vibration of initially stressed solids with particular referents to centrifugal force in rotation machinery // J.Strain Anal. – 1973. – V.8, №4. – P. 245-252.
28. *Савула Я.Г., Флейшман Н.П.* Расчет и оптимизация оболочек с резными срединными поверхностями. – Львов: Вища школа., 1990. – 170 с.
29. *Ahmad S., Anderson R.G., Zienkiewicz O.C.* Vibration of thick curved shells, with particular reference to turbine blades // J. Strain Anal. – 1970. – V.5, № 3. – P. 200-206.
30. *Walker R.P.* Vibration of cambered helicoidally fan blades // J. Sound Vibr. – 1978. – V 59, № 1. – P. 35-57.

31. *Богомолов С.И. Луценко С.С. Назаренко С.А.* О применении суперпараметрического оболочечного конечного элемента к расчету колебаний лопаток турбомашин // Проблемы прочности. – 1982. – № 6. – С. 71-74.
32. *Бате К., Вилсон Р.* Численные методы анализа и метод конечных элементов. – М.: Стройиздат, 1982. – 448 с.

REFERENCES

1. *Bazhenov V.A., Krivenko O.P., Solovey M.O.* Neliniyne deformuvannya ta stiykist pruzhnih obolonok neodnoridnoyi strukturi. – K.: ZAT «Vipol», 2010. – 316 s.
2. *Bazhenov V.A., Krivenko O.P., Solovey N.A.* Nelineynoe deformirovanie i ustoychivost uprugih obolochek neodnorodnoy strukturyi: Modeli, metodyi, algoritmyi, maloizuchennyie i novyie zadachi. – M.: Knizhnyiy dom «LIBRIKOM», 2013. – 336 s.
3. *Bazhenov V.A., Krivenko O.P., LegostaEv A.D.* Stiykist i vlasni kolivannya neodnoridnih obolonok z urahuvannyam napruzhenogo stanu // Opir materialiv i teoriya sporud: nauk.-teh. zbirn. – K.: KNUBA, 2015. – Vyp. 95. – S. 96-113.
4. *Krivenko O.P.* Vpliv nagrivu na stiykist i vlasni kolivannya sferichnoyi paneli pri zmini umov kombinovanogo zakriplennya konturu // Opir materialiv i teoriya sporud: nauk.-teh. zbirn. – K.: KNUBA, 2015. – Vyp. 96. – S. 48-65.
5. *Agapov V.P.* Metod konechnyih elementov v statike, dinamike i ustoychivosti prostranstvennyih tonkostennyih podkreplennyih konstruktsiy. – Uchebnoe posobie / M : izd. ASV, 2000. – 152 s.
6. *Yakushev V.L.* Nelineynyie deformatsii i ustoychivost tonkih obolochek. M.: Nauka, 2004. - 276 s.
7. *Golovanov A.I., Tyuleneva O.N., Shigabutdinov A.F.* Metod konechnyih elementov v statike i dinamike tonkostennyih konstruktsiy. – M.: FIZMATLIT, 2006. - 392 s.
8. 8. *Reddy J.N.* Theory and Analysis of Elastic Plates and Shells, Second Edition - CRC Press, 2006. - 568 p.
9. *Kukudzhanov S.N.* Kolebaniya i dinamicheskaya ustoychivost obolochek vrascheniya, blizkih k tsilindricheskim, nahodyaschihsya pod deystviem normalnogo davleniya i meridionalnyih usiliy // Izvestiya RAN. Mehanika tverdogo tela, 2006. – N2. – S. 48-59.
10. *Amabili M.* Nonlinear vibrations and stability of shells and plates. – Cambridge: Cambridge University Press, 2008. – 374 p.
11. *Zarutskii V.A., Lugovoi P.Z., Meish V.F.* Dynamic problems for and stress–strain state of inhomogeneous shell structures under stationary and nonstationary loads // International Applied Mechanics, 2009. – Vol 45, № 3. – Pp. 245-271.
12. *Karpov V.V.* Prochnost i ustoychivost podkreplennyih obolochek vrascheniya. V 2-h ch. Ch.1. Modeli i algoritmyi issledovaniya prochnosti i ustoychivosti podkreplennyih obolochek vrascheniya. FIZMATLIT, 2010. – 288 s.; Ch.2. Vyichislitelnyiy eksperiment pri staticheskom mehanicheskom vozdeystvii. – M.: FIZMATLIT, 2011. – 248 s.
13. *Zhgutov V.M.* Matematicheskoe i kompyuternoe modelirovanie nelineynyih svobodnyih kolebaniy uprugih pologih obolochek stupenchato-peremennoy tolschinyi // Inzhenerno-stroitelnyiy zhurnal, 2010. – N4. – S. 38-48.
14. *Chapelle D., Bathe K.J.* The finite element analysis of shells – Fundamentals. Series: Computational fluid and solid mechanics. - Berlin; Heidelberg: Springer, 2011. – 410 p.
15. *Gavrilenko G.D., Matsner V.I., Kutenkova O.A.* Dent and thickness effects on the critical loads of stiffened shells // Strength of Materials, 2011. – Vol. 43, No. 3. – Pp. 347-351.
16. *Nikolaev A.P., Klochkov Yu.V., Kiselev A.P., Gureeva N.A.* Vektornaya interpolyatsiya poley peremescheniy v konechno-elementnyih raschetah obolochek: monografiya – Volgograd: FGBOU VPO Volgogradskiy GAU, 2012. – 264 s.

17. *Ghanbari Ghazijahani T., Showkati H.* Locally imperfect conical shells under uniform external pressure // Strength of Materials, 2013. – Vol., No. 3. – Pp. 369-377.
18. *Volmir A.S.* Nelineynaya dinamika plastinok i obolochek. – M.: Nauka, 1972. – 432 s.
19. Metod konechnyih elementov v mehanike tverdyih tel / *A.S. Saharov, V.N. Kislookiy, V.V. Kirichevskiy i dr.* – K.: Vischa shk. Golov. izd-vo, 1982. – 480 s.
20. *Bazhenov V.A.* Variatsiyni printsipi i metodi budivelnoyi mehaniki: Pidruchnik. – Kiyiv: Karavela, 2012. – 720 s.
21. *Bazhenov V.A., Krivenko O.P., Solovey M.O.* Matritsya mas modifikovanogo prostorovogo skinchennogo elementa neodnoridnoyi obolonki // Opir materialiv i teoriya sporud: nauk.-teh. zbirn. – K.: KNUBA, 2013. – Vyp. 91. – S. 114-125.
22. *Kislookiy V.N., Legostaev A.D.* Realizatsiya metoda konechnyih elementov v zadachah issledovaniya svobodnyih kolebaniy obolochek i plastin //Opir materialiv i teoriya sporud, – Kiyiv: Budivelnik, 1974. – Vyp. 27. – S. 24-32.
23. *Lehostaiev A.D, Hrechukh N.A.* Deiaki zadachi dynamiky obolonkovykh konstruktsii // Opir materialiv i teoriia sporud: nauk.-tekh. zbirn. – K.: KNUBA, 2012. – Vyp. 89. – C. 78-86.
24. *Cowep G.R., Lindberg G.M., Olson M.D.* A shallow shell finite element of triangular shape // Int. J. Solids and Structures, 1970. – V.6, №8. – P. 1133-1156.
25. *Olson M.D., Linberg G.M.* Vibration analysis of cantilever plates, using a new cylindrical shell finite elements // Pros of 2nd Conf. math. strut. mech., AF base Wright. Peterson. Otto, 1968. – P. 247-269.
26. *Serazutdinov M.N.* Statika i dinamika tonkostennyih elementov konstruktsiy slozhnoy geometrii //Diss. na soiskanie uchenoy stepeni doktora fiz. mat nauk.
27. *Bossak M.A., Zienkiewicz O.C.* Free vibration of initially stressed solids with particular referents to centrifugal force in rotation machinery // J.Strain Anal. – 1973. – V.8, №4. – P. 245-252.
28. *Savula Ya.G., Fleyshman N.P.* Raschet i optimizatsiya obolochek s reznyimi sredinnyimi poverhnostyami. – Lvov: Vischa shkola., 1990. – 170 s.
29. *Ahmad S., Anderson R.G., Zienkiewicz O.C.* Vibration of thick curved shells, with particular reference to turbine blades // J. Strain Anal. – 1970. – V.5, № 3. – P. 200-206.
30. *Walker R.P.* Vibration of cambered helicoidally fan blades // J. Sound Vibr. – 1978. –V 59, № 1. – P. 35-57.
31. *Bogomolov S.I. Lutsenko S.S. Nazarenko S.A.* O primenenii superparametricheskogo obolochechnogo konechnogo elementa k raschetu kolebaniy lopatok turbomashin // Problemyi prochnosti. – 1982. – N 6. – S. 71-74.
32. *Bate K., Vilson R.* Chislennyie metodyi analiza i metod konechnyih elementov. – M.: Stroyizdat, 1982. – 448 p.

Krivenko O.P., Legostaev A.D., Hrechuh N.A.

ANALYSIS OF NATURAL VIBRATIONS OF SHELLS WITH INHOMOGENEOUS STRUCTURE USING REDUCED FINITE ELEMENT MODEL

The method of creating the reduced governing equations for the existing finite element method of calculation of thin elastic shells with different geometric characteristics according to the thickness is considered. The method of investigating inhomogeneous shells is based on the uniform methodological positions of the 3-d geometrically nonlinear theory of thermoelasticity and the finite-element method in the form of the moment finite-element scheme. Thus, thin multilayer shells of variable thickness and complex geometry are considered as three-dimensional bodies that can be reinforced with ribs and cover plates, weakened by cavities, channels, and holes, and have sharp bends in the mid-surface.

Two hypotheses are used to describe the stress–strain state of a thin inhomogeneous shell. The nonclassical kinematic hypothesis of deformed straight line: though stretched or shortened during deformation, a straight segment along the thickness remains straight. This segment is not necessarily normal to the mid-surface of the shell. The displacements are assumed distributed linearly along the thickness, which is conventional in the theory of thin shells. The static hypothesis compressive assumes that the stresses in the fibers are constant throughout the thickness of the shell.

The effectiveness of the developed method is demonstrated by determining the oscillation of a cylindrical cantilever panel. It is investigated the convergence of solutions and compared them with the results obtained experimentally and by other authors. It is shown that the application of the method of basic nodes to the problems of the dynamics of shell structures is an effective tool that allows, in the framework of a single algorithm, to significantly expand the capabilities of the displacement method when constructing solutions of the problem by the finite element method.

Key words: thin elastic shell of inhomogeneous structure, universal finite element, reduced model, oscillation.

Кривенко О.П., Легостаев А.Д., Гречух Н.А.

АНАЛИЗ СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ ОБОЛОЧЕК НЕОДНОРОДНОЙ СТРУКТУРЫ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ РЕДУЦИРОВАННОЙ КОНЕЧНО-ЭЛЕМЕНТНОЙ МОДЕЛИ

Предложен алгоритм исследования динамических характеристик неоднородных оболочек с использованием редуцированной конечно-элементной модели, построенной методом базисных узлов. Эффективность разработанного метода продемонстрирована на примере определения собственных колебаний цилиндрической консольной панели.

Ключевые слова: тонкая упругая оболочка неоднородной структуры, универсальный конечный элемент, редуцированная модель, колебание.

УДК 539.3

Кривенко О.П., Легостаєв А.Д., Гречух Н.А. **Аналіз власних коливань оболонок неоднорідної структури з використанням редукованої скінченноелементної моделі** / Опір матеріалів і теорія споруд: наук.-тех. збірн. – К.: КНУБА, 2017. – Вип. 98. – С. 72-88.

Розглянуто методику побудови редукованих розв'язувальних рівнянь для існуючого скінченноелементного методу розрахунку тонких пружних оболонок з різними геометричними особливостями за товщиною.

Табл. 4, Ил. 3, Библиогр. 32 назв.

Krivenko O.P., Legostaev A.D., Hrechuh N.A. **Analysis of natural vibrations of shells with inhomogeneous structure using the reduced finite element model** / Strength of Materials and Theory of Structures: Scientific-and-technical collected articles – Kyiv: KNUBA, 2017. – Issue 98. – P. 72-88. – Ukr.

The method of creating the reduced governing equations for the existing finite element method of calculation of thin elastic shells with different geometric characteristics according to the thickness is considered.

Tabl. 4, Fig. 3, Bibliograf. 32 ref.

Кривенко О.П., Легостаев А.Д., Гречух Н.А. **Анализ собственных колебаний оболочек неоднородной структуры с использованием редуцированной конечно-элементной модели** / Сопротивление материалов и теория сооружений: науч.-тех. сборн. – К.: КНУСА, 2017. – Вып. 98. – С. 72-88. – Укр.

Рассмотрена методика построения редуцированных разрешающих уравнений для существующего конечно-элементного метода расчета тонких упругих оболочек с различными геометрическими особенностями по толщине.

Табл. 4, Ил. 3, Библиогр. 32 назв.

Автор (науковий ступінь, вчене звання, посада): *кандидат технічних наук, старший науковий співробітник, провідний науковий співробітник НДІ будівельної механіки КНУБА КРИВЕНКО Ольга Петрівна*
Мобільний тел.: *+38(066) 048-32-77*
E-mail: olakop@ukr.net

Автор (науковий ступінь, вчене звання, посада): *кандидат технічних наук, доцент, доцент кафедри будівельної механіки КНУБА ЛЕГОСТАЄВ Анатолій Дмитрович*
Мобільний тел.: *+38(096) 340-59-18*
E-mail: anat_leg@ukr.net

Автор (науковий ступінь, вчене звання, посада): *науковий співробітник НДІ будівельної механіки КНУБА ГРЕЧУХ Наталія Анатоліївна*
Адреса робоча: *03680 Україна, м. Київ, Повітрофлотський проспект 31, Київський національний університет будівництва і архітектури.*
Робочий тел.: *+38(044) 245-48-29*
Мобільний тел.: *+38(097) 426-16-09*
E-mail: natniism@ukr.net