

УДК 539.3+511.1

ОБЕРНЕНА ЗАДАЧА БУДІВЕЛЬНОЇ МЕХАНІКИ АРМОВАНОЇ ЦИЛІНДРИЧНОЇ ОБОЛОНКИ ЗІ СКЛОПЛАСТИКУ

В.О. Бараненко¹,

д-р техн. наук, професор кафедри будівельної механіки

Д.Л. Волчок¹,

канд. техн. наук, доцент кафедри будівельної механіки

¹*Придніпровська державна академія будівництва та архітектури*

Розглядається постановка оберненої задачі будівельної механіки - оптимального проектування ортотропної циліндричної оболонки зі склопластику, стисненої поздовжніми силами за критерієм матеріаломісткості з урахуванням обмежень за міцністю, місцевій та загальній втраті стійкості. Змінними проектування є товщина, радіус і відносний вміст армуючих волокон. Реалізація задачі виконана за допомогою методів множників Лагранжа і Монте-Карло. Наводяться результати чисельних експериментів. Розглянуто вплив нечіткого опису навантаження на оптимальний проект. Наводиться оцінка коефіцієнта надійності за навантаженням для деяких випадків інформаційних ситуацій щодо опису нечітких величин поздовжньої сили.

Ключові слова: обернена задача, циліндрична армована оболонка, нечіткі величини, оптимальне проектування конструкцій, невизначене програмування, нечітке моделювання.

1. Вступ

Завдання, що виникають в процесі оптимального проектування конструкцій, пов'язані з проблемою зниження матеріаломісткості та забезпечення їх високої надійності. Стосовно до споруд і конструкцій це означає гарантування їх неруйнування при експлуатації. Характерною особливістю великого числа опублікованих робіт з проектування конструкцій є те, що в них розглядаються прямі задачі будівельної механіки, в яких визначаються:

- характеристики напружено-деформованого стану елементів конструкції при заданих розмірах, геометрії і структурі елементів, зовнішніх впливах;

- запаси міцності і надійності. Для таких задач застосовуються найсучасніші методи механіки і прикладної математики.

Іншим типом задач будівельної механіки є обернені задачі, що дозволяють визначати геометричні параметри, характеристики структури, величини прикладених впливів і ін., виходячи з критеріїв несучої здатності, матеріаломісткості, надійності та інших вимог.

Однак бувають випадки, коли необхідно враховувати невизначену природу багатьох факторів, що впливають на роботу конструкції, які

обумовлюють випадковість, нечіткість і неточність опису частини вихідних даних.

Для компенсації можливих похибок і неточностей в завданні вихідних величин в практичному застосуванні вводяться коефіцієнти запасу, надійності. Вони призначаються відповідно до норм проектування, які в свою чергу, є інтуїтивними, отриманими відповідно до накопиченого досвіду без досить суворого на те обґрунтування. В цьому випадку принципово відмінними є їх постановка і методи дослідження. Для розв'язання їх необхідний такий математичний апарат, який мав би можливість априорі враховувати ці невизначеності. Думка про терпимість проєктованої системи до наявності вихідних "грубих" ("сирих") даних приваблива. Тут під терпимістю (толерантністю) до невизначеного розуміється здатність системи переносити нечіткі, випадкові і неточні дані в класичні методи аналізу і прийняття рішень.

У даній роботі на основі методу множників Лагранжа оболонки реалізується задача нелінійної оптимізації стиснутої ортотропної циліндричної оболонки мінімального обсягу (маси) при виконанні умов несучої здатності. Розв'язання задачі в разі нечіткого завдання стискаючої сили проводиться із застосуванням інтервального підходу в теорії нечітких множин [1].

2. Об'єкт оптимізації

Розглянемо ортотропну кругову циліндричну шарнірно-обперту по кінцях оболонку з геометричними характеристиками: довжиною L , товщиною h і радіусом R . Конструкція виконана зі склопластику, армованого в двох напрямках з модулем пружності E . Будемо розглядати випадок, коли коефіцієнт об'ємного армування є сталим, а відносний вміст армуючих волокон в осьовому напрямку буде величиною змінною. В рамках лінійного наближення теорії армування з урахуванням того, що $E_a \gg E_c$ (E_a, E_c - відповідно модуль пружності армуючого матеріалу і сполучного), для модулів пружності оболонки E_1 і E_2 маємо наближені вирази [2]

$$E_1 = \theta E; E_2 = (1 - \theta) E, \quad (1)$$

які визначаються модулем пружності E і коефіцієнтом μ , θ - відносний вміст армуючих волокон в осьовому напрямку. Міцність матеріалу оболонки на стиск в осьовому напрямку характеризується величиною σ_0 .

Введемо в розгляд наближені вирази для трьох граничних станів оболонки [2,3]:

- критичного осьового зусилля P_{kp}^m при шарнірному закріпленні оболонки в припущенні достатньої зсувної жорсткості в трансверсальній

площині і площині оболонки;

- критичного осьового зусилля P_{kp}^c в разі шарнірно-опертого стержня з кільцевим перетином;

- міцності оболонки P_R на стиск силою F_* , відповідно за допомогою наступних співвідношень

$$P_{kp}^m \geq F_*, \quad P_{kp}^c \geq F_*, \quad P_R \geq F_*, \quad (2)$$

$$P_{kp}^m = Bx_1^2 \sqrt{x_3 x_4}, \quad (3)$$

$$P_{kp}^c = Cx_1 x_2^3 x_3, \quad (4)$$

$$P_R = Dx_1 x_2 \sqrt[3]{x_3^2}, \quad (5)$$

$$B = \frac{2\pi}{\sqrt{3}} E, \quad C = \frac{\pi^3 E}{L^2}, \quad D = 2\pi\sigma_0, \quad x = \{x_1, x_2, x_3, x_4\},$$

$$x_1 = h, \quad x_2 = R, \quad x_3 = \theta, \quad x_4 = 1 - \theta,$$

$$x_5 = \sigma_0, \quad x_6 = E, \quad x_7 = L, \quad x_i > 0, \quad i = 1, 2, \dots, 7. \quad (6)$$

Співвідношення (2) - (6) утворюють фізичні обмеження

$$g_i(x) - 1 \leq 0, \quad i = 1, 2, 3. \quad (7)$$

$$\text{Тут } g_1(x) = \frac{F_*}{Bx_1^2 \sqrt{x_3 x_4}}, \quad g_2(x) = \frac{F_*}{Cx_1 x_2^3 x_3}, \quad g_3(x) = \frac{F_*}{Dx_1 x_2 \sqrt[3]{x_3^2}}.$$

Перше обмеження в (2) визначає можливість місцевої втрати стійкості, а друге - можливість загальної втрати стійкості, як стержня. Третя нерівність в (2) визначає можливість руйнування конструкції при дії прикладеного навантаження [4].

Необхідно знайти такі значення змінних $x^{opt} = \{x_1^{opt}, x_2^{opt}, x_3^{opt}\}$, щоб за умови збереження стійкості і міцності оболонка мала мінімальний обсяг матеріалу (масу) $W(F_*, x)$.

У математичних термінах задача запишеться як:

$$x^{opt} = \arg \left\{ \min_x W(x) \mid g_i(x) - 1 \leq 0, i = 1, 2, 3; x_i > 0 \right\}, \quad (8)$$

$$W = Ax_1 x_2; \quad A = 2\pi\rho L.$$

Вона відноситься до класу задач нелінійного опуклого програмування [5], оскільки функції, що входять в (8), неперервні і задовольняють умовам опуклості

$$g_i \left[\lambda x^{(2)} + (1 - \lambda)x^{(1)} \right] \leq (\geq) \left(\lambda g_i(x^{(2)}) + (1 - \lambda)g_i(x^{(1)}) \right)$$

для $0 \leq \lambda \leq 1$; $x^{(1)}$, $x^{(2)}$ - будь-які величини. У будівельній механіці таку

задачу називають оберненою, так як частина параметрів тут невідома.

При постановці оберненої задачі частина змінних x_i , $i = 1, 2, \dots, r$, на відміну від прямої задачі є шуканими, інша частина - відомі величини,

$$u_1 = x_{r+1}; u_2 = x_{r+2}; \dots; u_r = x_{m-r}, \quad r \leq m.$$

Напружено-деформований стан конструкції зумовлюється таким чином, щоб її робота була найбільш раціональною. У розглянутій задачі (8) шуканими змінними будуть $x_1 = h$, $x_2 = R$, $x_3 = \theta$, $r = 3$. Перевага обернених задач полягає в тому, що більшість з них допускають аналітичне розв'язання за допомогою традиційних методів будівельної механіки і прикладної математики для випадку, коли число обмежень m не перевищує числа невідомих параметрів r .

Ідея постановки оберненої задачі будівельної механіки була і є дуже плідною в теорії оптимального проектування конструкцій.

3. Метод множників Лагранжа

Складемо допоміжну функцію

$$L(x, \Lambda) = f(x) + \sum_{j=1}^m \lambda_j g_j(x), \quad (9)$$

де $\Lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$ - невідомі множники Лагранжа, причому $0 \leq \lambda_j \leq 1$.

В результаті задачу знаходження умовного екстремуму замінимо задачею знаходження безумовного екстремуму, тобто скористаємося тим, що необхідні умови безумовного екстремуму функції $L(x, \Lambda)$ є також необхідними і для умовного екстремуму вихідної задачі [4]. Передбачається, що функції входять в (9) безперервні і диференційовані, причому $g_j(x)$, $W(x)$ є опуклими. Передбачається також, що умови Куна-Таккера для задачі нелінійного програмування виконуються. Абсолютний екстремум знайдеться з рішення системи рівнянь, отриманої з необхідних умов існування екстремуму функції Лагранжа $L(x, \Lambda)$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x_i} &= \frac{\partial f}{\partial x_i} + \sum_{j=1}^M \lambda_j \frac{\partial g_j}{\partial x_i} \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda_j} &= g_j = 0; \quad j = 1, 2, \dots, m \\ i &= 1, 2, \dots, r \end{aligned} \right\}. \quad (10)$$

У позначеннях задачі (8) функція Лагранжа (9) і співвідношення необхідних умов оптимальності (10) будуть наступними

$$L(x_1, x_2, x_3, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = Ax_1x_2 + \lambda_1\left(\frac{F^*}{B}x_1^{-2}(x_3x_4)^{\frac{1}{2}} - 1\right) + \lambda_2\left(\frac{F^*}{C}(x_1^{-1}x_3^{-1}x_2^{-3} - 1)\right) + \lambda_3\left(\frac{F^*}{D}((x_1^{-1}x_2^{-1})x_3^{-\frac{2}{3}} - 1)\right), \quad (11)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = Ax_2 - \lambda_1\left(\frac{F^*}{B}\frac{2x_1^{-3}}{x_3^{1/2}(1-x_3)^{1/2}}\right) - \lambda_2\left(\frac{F^*}{C}\frac{x_1^{-2}}{x_3x_2^3}\right) - \lambda_3\left(\frac{F^*}{D}\frac{x_1^{-2}}{x_2x_3^{2/3}}\right) = 0, \quad (12)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = Ax_1 - \lambda_2\left(\frac{F^*}{C}\frac{3x_2^{-4}}{x_1x_3}\right) - \lambda_3\left(\frac{F^*}{D}\frac{x_2^{-2}}{x_1x_3^{2/3}}\right) = 0, \quad (13)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_3} = \lambda_1\left(\frac{F^*}{B}\frac{1}{x_1^2}\frac{1}{2x_3^{1/2}(1-x_3)^{1/2}}\left(\frac{1}{1-x_3} - \frac{1}{x_3\sqrt{1-x_3}}\right)\right) - \lambda_2\left(\frac{F^*}{C}\frac{x_3^{-2}}{x_1x_2^3}\right) - \lambda_3\left(\frac{F^*}{D}\frac{\frac{2}{3}x_3^{-\frac{1}{3}}}{x_1x_2}\right) = 0, \quad (14)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_1} = \frac{F^*}{B}\frac{1}{x_1^2x_3^{1/2}(1-x_3)^{1/2}} - 1 = 0, \quad (15)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_2} = \frac{F^*}{C}\frac{1}{x_1x_3x_2^3} - 1 = 0, \quad (16)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_3} = \frac{F^*}{D}\frac{1}{x_1x_2x_3^{2/3}} - 1 = 0. \quad (17)$$

4. Розв'язання системи нелінійних рівнянь

4.1. Отримання аналітичних співвідношень

У рівняннях (14) і (17) позначимо

$$u = \frac{F^*}{B}; \quad v = \frac{F^*}{C}; \quad w = \frac{F^*}{D}. \quad (18)$$

Тоді з урахуванням визначень g_j з (7) маємо:

$$u = x_1^2x_3^{1/2}(1-x_3)^{1/2}, \quad (19)$$

$$v = x_1x_3x_2^3, \quad (20)$$

$$w = x_1x_2x_3^{2/3}. \quad (21)$$

З рівняння (21) виразимо x_2

$$x_2 = \frac{w}{x_1x_3^{2/3}}. \quad (22)$$

Возведемо вираз (22) в куб, отримаємо

$$x_2^3 = \frac{w^3}{x_1^3 x_3^2}. \quad (23)$$

Величину x_2^3 з виразу (23) підставимо в співвідношення (20), отримаємо

$$w^3 = x_1^2 x_3 v;$$

звідки випливає, що

$$x_1^2 = \frac{w^3}{x_3 v}. \quad (24)$$

Підставляючи вираз (24) в (19), отримаємо

$$u = \frac{w^3}{vx_3} x_3^{1/2} (1 - x_3)^{1/2}. \quad (25)$$

Якщо піднести вираз (25) до квадрату, маємо

$$\begin{aligned} u^2 &= \frac{w^6}{v^2 x_3^2} x_3 (1 - x_3), \quad u^2 v^2 x_3 = w^6 (1 - x_3), \\ u^2 v^2 x_3 &= w^6 (1 - x_3), \quad w^6 = u^2 v^2 x_3 + w^6 x_3, \\ w^6 &= (u^2 v^2 + w^6) x_3. \end{aligned} \quad (26)$$

Зі співвідношення (26) випливає, що

$$x_3 = \frac{w^6}{(u^2 v^2 + w^6)}. \quad (27)$$

Вираз (27) підставимо в (24), в результаті отримаємо $x_1^2 = \frac{w^6 + u^2 v^2}{w^3 v}$, з

якого випливає, що

$$x_1 = \sqrt{\frac{w^6 + u^2 v^2}{w^3 v}}. \quad (28)$$

Вирази (27) і (28) підставимо в визначення (22). В результаті чого маємо

$$x_2 = \frac{\sqrt[6]{(u^2 v^2 + w^6)} \sqrt{v/w}}{w}. \quad (29)$$

Підставляючи отримані значення x_j ; $j=1,2,3$ в систему трьох алгебраїчних рівнянь (12) - (14)

$$\begin{cases} Ax_2 - \lambda_1 U - \lambda_2 V - \lambda_3 W = 0 \\ Ax_1 - \lambda_2 T - \lambda_3 Z = 0 \\ \lambda_1 Q - \lambda_2 G - \lambda_3 R_0 = 0 \end{cases}$$

і виконуючи розв'язання її, отримаємо шукані вирази множників в означенні функції Лагранжа

$$\lambda_1 = \frac{\left(\frac{A}{T} - (x_2^* - (V - GU))x_1^*\right) (ZG - TR_0)}{\left[(W + R_0U)T - Z(V - G)\right] T},$$

$$\lambda_2 = \frac{A}{T} \left(1 - \frac{z(x_2^* - (V - GU))x_1^*}{\left[(W + R_0U)T - Z(V - G)\right]}\right),$$

$$\lambda_3 = \frac{A(x_2^* - (V - GU)x_1^* / T)T}{\left[(W + R_0U)T - Z(V - G)\right]}$$

або

$$\lambda_1 = \frac{A}{T} \left[Gx_1^* - \frac{S_1}{S_2} (Z \cdot G - T \cdot R_0) \right],$$

$$\lambda_2 = \frac{A}{T} \left[x_1^* - Z \cdot \frac{S_1}{S_2} \right],$$

$$\lambda_3 = A \cdot \frac{S_1}{S_2},$$

де уведено такі позначення:

$$S_1 = x_2^* - (V - GU)x_1^*, \quad S_2 = (Z + R_0U)T - Z(V - G), \quad T = \frac{F^*}{C} \frac{3}{x_2^4 x_1 x_3},$$

$$Q = \frac{F^*}{2B(x_1^*)^2 \sqrt{x_3^*} (1 - x_3^*)} \left(\frac{1}{1 - x_3^*} - \frac{1}{x_3^* \sqrt{1 - x_3^*}} \right),$$

$$V = g_2(x^*), \quad Z = g_3(x^*), \quad U = 2g_1(x^*), \quad G = g_2(x^*) + 1; \quad R_0 = \frac{2}{3}(g_3(x^*) + 1),$$

$$x^* = \{x_1^*, x_2^*, x_3^*\}.$$

Отримані вирази (27), (28) і (29) запишемо в термінах позначень B , C , D , F^* , з (6). В результаті маємо оптимальні величини шуканих параметрів h, R, θ та обсягу матеріалу оболонки

$$h^{opt} = x_1^* = \sqrt{\frac{D^6 + (F^* BC)^2}{BD\sqrt{DC}}}, \quad R^{opt} = x_2^* = \sqrt[6]{\frac{D^6 + (F^* BC)^2}{\sqrt[3]{F^* BC}}} \sqrt{\frac{D}{C}},$$

$$\theta^{opt} = x_3^* = \frac{(F^* BC)^2}{D^6 + (F^* BC)^2}, \quad W^* = \frac{A^3 \left[D^6 + (F^* BC)^2 \right]^2}{BDC \sqrt[3]{F^* BC}}. \quad (30)$$

4.2. Чисельна ілюстрація

При таких детермінованих значеннях вихідних даних: $E = 35 \text{ GPa}$; $L = 0,5 \text{ м}$; $\sigma_0 = 0,4 \text{ GPa}$; $F^* = 50 \text{ кН}$ виконано розрахунок за формулами (30). Отримано $x_1^* = 0,0954 \text{ см}$; $x_2^* = 2,5239 \text{ см}$; $x_3^* = 0,7508 \text{ см}$; $W^* = 75,658 \text{ см}^3$

З метою перевірки правильності отриманих результатів задача (8) була розв'язана чисельно на основі методу статистичних випробувань (метод Монте-Карло). При виконанні $N = 10^7$ випробувань було отримано $R^* = 2,515 \text{ см}$, $\theta^* = 0,757$, $h^* = 0,096 \text{ см}$, $W^* = 75,702 \text{ см}^3$. Такий розв'язок практично збігається з розв'язком, який отримано за формулами (30). Графік збіжності значень цільової функції W^* до свого граничного значення подано на рис. 1.

Рис. 1. Графік збіжності до граничної точки W^* (метод Монте-Карло)

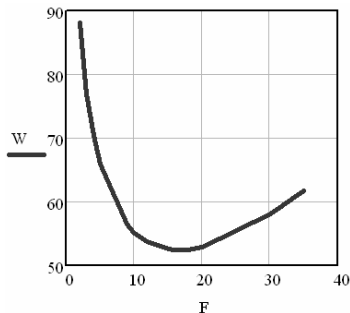


Рис. 2. Задача $F_{min}^* = \min W(F^*)$

Співвідношення (30) дозволяє проаналізувати: яка величина сили F_{min}^* забезпечить мінімальне значення функції мінімального обсягу. Залежність величини W від величини сили F^* , подано графічно на рис. 2.

У точці $F_{min}^* = 16,65 \text{ кН}$ функція W досягає свого мінімуму, що дорівнює $W = 52,381 \text{ см}^3$. При цьому параметри проекту будуть наступними $h = 0,055 \text{ см}$; $R = 3,031 \text{ см}$; $\theta = 0,25$.

5. Нечітке завдання навантаження

Розрахункові формули (30) дозволяють виконати аналіз впливу на оптимальний проект "грубого" завдання навантаження, вираженого у формі нечіткого опису, наприклад, "величина F_* близька до числа $50кН$ ", "величина F_* трохи більше, ніж...", "величина F_* береться з інтервалу..." і т.д. Адекватним описом такої невизначеності є нечіткі множини із заданою функцією належності $\mu(x)$, що має, наприклад, трикутний вид

$$\mu(x) = \begin{cases} \frac{x-a}{m-a} & \text{для } a \leq x \leq m, \\ \frac{b-x}{b-m} & \text{для } m < x \leq b, \\ 0 & \text{для інших,} \end{cases} \quad (31)$$

де $a \leq m \leq b$; a, b, m - задані величини; a, b - границі інтервалу розкиду нечіткої величини; m - мода нечіткого числа.

Введення α -рівня дозволяє побудувати чітку множину значень нечіткої величини ξ - деякого параметра з умови задачі (наприклад, $\xi_1 = E$ - модуль пружності, $\xi_2 = F^*$ - величина сили). В цьому випадку з (31) для будь-якого $\alpha \in [0,1]$ випливає, що множина Q_α є чіткий інтервал (рис. 3)

$$Q_\alpha = \{x \mid x^L(\alpha) \leq x \leq x^R(\alpha)\}, \quad (32)$$

де $x^L(\alpha) = m\alpha + (1-\alpha)a$; $x^R(\alpha) = m\alpha + (1-\alpha)b$.

Суперпозиція всіх Q_α ; $\alpha \in [0,1]$ утворює нечітку множину

$$Q = \bigcup_{\alpha \in [0;1]} \alpha Q_\alpha. \quad (33)$$

Для кожного рівня α за формулами (30) обчислюються нечіткі величини товщини, радіуса, відносного вмісту армуючих волокон, обсягу оболонки та сили стиснення. На рис. 3-5 наведено графіки функцій належності для величин $h^*(\alpha)$ (рис. 4); $R^*(\alpha)$

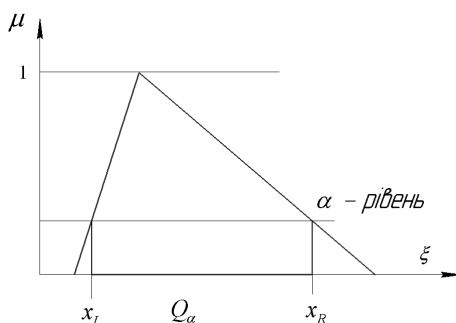


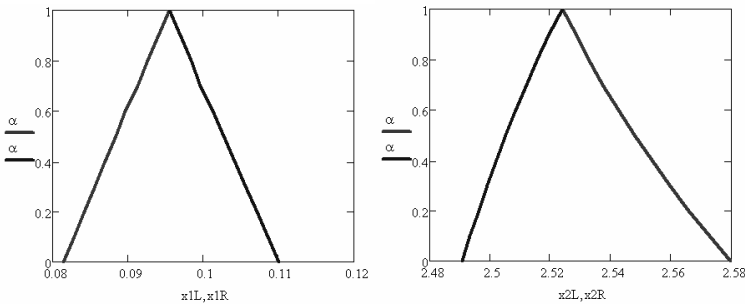
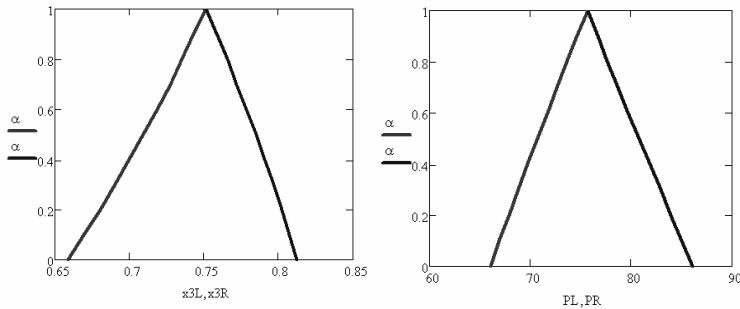
Рис. 3. Нечітке число ξ з функцією належності трикутного виду

(рис. 4); $\theta^*(\alpha)$ (рис. 5); W_α (рис. 6), і параметра $\xi = F^* \in Q_\alpha$, $\alpha \in [0,1]$ (рис. 5) за результатами експерименту 1, що надані в табл. 1.

Таблиця 1

Результати обчислень

α	h_L	h_R	R_L	R_R	θ_L	θ_R	W_L	W_R	F_L^*	F_R^*
0	0,0815	0,1101	2,5797	2,4908	0,6585	0,8127	66,0575	86,1207	4000	6000
0,1	0,0829	0,1086	2,5726	2,4935	0,6695	0,8075	66,9642	85,0465	4100	5900
0,2	0,0842	0,1071	2,5659	2,4962	0,6801	0,8022	67,8845	83,9777	4200	5800
0,3	0,0856	0,1056	2,5595	2,4992	0,6903	0,7966	68,8178	82,9147	4300	5700
0,4	0,0870	0,1041	2,5536	2,5022	0,7000	0,7908	69,7633	81,8576	4400	5600
0,5	0,0884	0,1027	2,5479	2,5054	0,7094	0,7848	70,7203	80,8068	4500	5500
0,6	0,0897	0,1012	2,5426	2,5087	0,7183	0,7785	71,6882	79,7625	4600	5400
0,7	0,0912	0,0997	2,5375	2,5123	0,7276	0,7720	72,6664	78,7252	4700	5300
0,8	0,0926	0,0983	2,5328	2,5159	0,7352	0,7652	73,6545	77,6951	4800	5200
0,9	0,0940	0,0969	2,5282	2,5198	0,7432	0,7582	74,6518	76,6725	4900	5100
1	0,0954	0,0954	2,5239	2,5239	0,7508	0,7508	75,658	75,658	5000	5000

Рис. 4. Функція належності нечітких величин h^* і R^* Рис. 5. Функція належності нечітких величин θ^* і F^*

Відповідно до визначень (32)-(33) і даними табл. 1 можна записати нечіткі множини (нечіткі числа) для h, R, θ, W . Наприклад, для W (графи 8-9) маємо:

$$W = \frac{0}{66.06} + \frac{0.1}{66.96} + \frac{0.2}{67.88} + \frac{0.3}{68.82} + \frac{0.4}{69.76} + \frac{0.5}{70.72} + \frac{0.6}{71.69} + \frac{0.7}{72.67} + \frac{0.8}{73.65} + \frac{0.9}{74.65} + \frac{1.0}{75.658} + \frac{0.9}{76.67} + \frac{0.8}{77.69} + \frac{0.7}{78.73} + \frac{0.6}{79.76} + \frac{0.5}{80.81} + \frac{0.4}{81.86} + \frac{0.3}{82.91} + \frac{0.2}{83.98} + \frac{0.1}{85.05} + \frac{0}{86.12}.$$

Перетворення нечіткого числа в чітке (етап дефаззифікації) виконано відповідно роботам [6,7]: очікуване значення нечіткої величини

$$\xi = \frac{\beta_1}{a_1} + \frac{\beta_2}{a_2} + \dots + \frac{\beta_m}{a_m}$$

є

$$\xi_{\text{det}} = \sum_{j=1}^m w_j a_j, \quad (34)$$

де вага w_i визначається за формулами:

$$w_i = w_i(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m); \quad m = 2M - 1;$$

$$w_1 = \frac{1}{2}(\beta_1 + A_0 - B_0), \quad \text{для } i = 1;$$

$$w_i = \frac{1}{2}(C_0 - D_0 + Q_0 - S_0), \quad \text{для } 2 \leq i \leq m - 1;$$

$$w_m = \frac{1}{2}(A_0 - P_0 + \beta_m), \quad (35)$$

де $A_0 = \max_{1 \leq j \leq m} \beta_j$, $B_0 = \max_{1 < j \leq m} \beta_j$, $C_0 = \max_{1 \leq j \leq i} \beta_j$, $D_0 = \max_{1 \leq j < i} \beta_j$, $S_0 = \max_{i < j \leq m} \beta_j$, $Q_0 = \max_{i \leq j \leq m} \beta_j$, $P_0 = \max_{i \leq j < m} \beta_j$, M – кількість β – рівнів; $0 \leq \beta_j \leq 1$; $1 \leq j \leq M$.

Відомі й інші прийоми дефаззифікації [1].

В результаті виконання цього етапу з величин W_α^* , $h^*(\alpha)$, $R^*(\alpha)$, $\theta^*(\alpha)$, $\alpha = \beta_j$ отримано, відповідно, детерміновані очікувані значення оптимальних обсягу, товщини, радіуса, відносного вмісту армуючих волокон (табл. 2), в семи експериментах, вихідні дані яких представлені в тій же табл. 2 (другий, третій стовпці). В цих стовпцях зазначено також % відхилення розкиду нечіткого числа від заданого його модального значення $m_F = 50 \text{ кН}$.

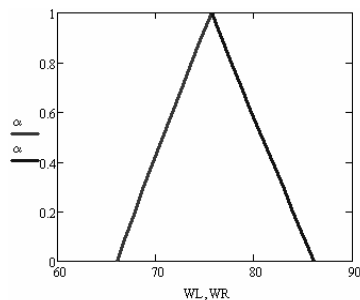


Рис. 6. Функція належності нечіткої величини W

Таблиця 2

Параметри нечіткого навантаження $F^*(a, m, b)$, очікуване значення
шуканих h_{det}^{def} , R_{det}^{def} , θ_{det}^{def} , W_{det}^{def} , F_{det}^{def} , η .

№ експ.	a, кН	b, кН	h_{det}^{def} , см	R_{det}^{def} , см	θ_{det}^{def}	W_{det}^{def} , см ³	%	F_{det}^{def} , кН	η
1	40(20%)	60(20%)	0,096	2,53	0,747	75,78	0,16	50,12	1,002
2	30(40%)	70(40%)	0,09	2,54	0,733	76,17	0,68	50,5	1,01
3	45(10%)	70(40%)	0,1	2,51	0,768	79,28	4,79	53,52	1,07
4	45(10%)	80(60%)	0,104	2,51	0,778	81,75	8,05	55,90	1,12
5	43(14%)	75(55%)	0,102	2,52	0,770	80,07	5,83	54,70	1,09
6	50(0%)	70(40%)	0,102	2,51	0,775	80,04	6,27	54,60	1,09
7	50(0%)	80(60%)	0,105	2,51	0,787	82,87	9,53	55,96	1,14
det	0	0	0,0954	2,524	0,751	75,658	0	50	1

Примітка. 1. В експериментах 1-5 реалізована така інформаційна ситуація: «навантаження, яке прикладене до оболонки, приблизно дорівнює 50 кН». 2. В експериментах 6-7 реалізована інформаційна ситуація: «навантаження, що прикладене до оболонки, трохи більше, ніж 50 кН».

За допомогою (30) для ряду експериментів з різним завданням нечіткого значення поздовжньої сили $F^*(a, m, b)$ отримано величини шуканих параметрів (табл. 2). У графі 8(%) наводиться відхилення дефазифікованого значення W_{def}^{det} від значення W_{det}^{det} , отриманого при використанні точного F^* . У графі F_{def}^{det} таблиці наводиться детерміноване значення прикладеної сили, що відповідає величині W_{def}^{det} . Якщо підставити W_{det}^{def} в ліву частину виразу для W^* (30) і розв'язати отримане рівняння

$$F^2 - 9F + \psi = 0 \quad \mathcal{G} = \frac{(W^{def})^3 BCD^3}{A}; \quad \psi = \left(\frac{D^3}{BC} \right)^2 \quad (31)$$

щодо невідомої F , то отримаємо F_{def}^{det} .

У графі 10 табл. 2 наводиться відношення сили F_{def}^{det} , отриманої у випадку проектування оболонки при наявності дефектів в завданні вихідних даних, до нормативної сили F^* (детерміноване значення). Це відношення є означення коефіцієнта надійності по навантаженню, тобто

$$\eta = \frac{F_{def}^{det}}{F^*}.$$

В нормах проектування для стержневих елементів цю величину призначають рівною 1,1 [8].

6. Висновки

1. Показано застосування класичного аналізу в детермінованій задачі нелінійної оптимізації стиснутої гладкої циліндричної оболонки з армованого склопластику мінімального обсягу при виконанні умов несучої здатності.

2. Для заданої сили стиснення отримано аналітичні вирази для шуканих параметрів проектування - товщини, радіуса, відносного вмісту армуючих волокон і обсягу (маси) оболонки.

3. Проведено аналіз зміни величини стискаючої сили на величину мінімального обсягу. Визначено точка величини сили стиснення, в якій досягається мінімум функції мінімального обсягу.

4. На основі теорії нечітких множин та отриманих аналітичних розв'язків проведено ряд числових експериментів, в результаті яких оцінені параметри оболонки як функції нечіткої величини сили (її розкиду). Як і очікувалося, наявність невизначеності в вихідному описі даних веде до збільшення витрати матеріалу.

5. Пропонується підхід до оцінки коефіцієнта надійності по навантаженню, що враховує несприятливе відхилення значення реального впливу з нечітким описом від нормативної величини. Використана модель «навантаження - несуча здатність» конструкції.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Рутковская Д., Пилинский М., Рутковский Л. Нейронные сети, генетические алгоритмы и нечёткие системы М.:Горячая линия - Телеком. - 2008. - 383 с.
2. Тетерс Г.А., Рикардс Р.Б., Нарусберг В.Л. Оптимизация оболочек из слоистых композитов – Рига : Зинатне. – 1978.- 240 с.
3. Рикардс Р.Б., Тетерс Г.А. Устойчивость оболочек из композитных материалов Рига : Зинатне – 1974.- 312 с.
4. Рикардс Р.Б. Двойственная задача оптимизации ортотропной цилиндрической оболочки. – Механика полимеров.- 1973.- № 5 - с.805-871.
5. Зангвилл У.И. Нелинейное программирование Единый подход М.: Сов.радио.- 1973.- 312 с.
6. Liu B. Uncertain Programming Wiley New York.-1999.-201 p.
7. Baoding Liu. Theory and Practice of Uncertain Programming Physica-Verlag Heidelberg; A Springer –Verlag Company.- 2002. - 416 p.
8. ДБН В.1.2-2:2006 Система забезпечення надійності та безпеки будівельних об'єктів «Навантаження і впливи» - К: Мін. буд. України, 2016. – 75 с.

REFERENCES

1. Rutkovskaya D., Pilinskiy M., Rutkovskiy L. Neyronnyie seti, geneticheskie algoritmy i nechyotkie sistemyi (Neural networks, genetic algorithms and fuzzy systems) M.:Goryachaya liniya- Telekom.- 2008.-383 s.
2. Teters G.A., Rikards R.B., Narusberg V.L. Optimizatsiya obolochek iz sloistyih kompozitov (Optimizing the shells of laminated composites) –Riga : Zinatne. – 1978.- 240 s.
3. Rikards R.B., Teters G.A. Ustoychivost obolochek iz kompozitnyih materialov (Stability of shells of composite materials) Riga : Zinatne – 1974.- 312 s.

4. *Rikards R.B.* Dvoystvennaya zadacha optimizatsii ortotropnoy tsilindricheskoy obolochki (The dual problem of optimization of the orthotropic cylindrical shell) – *Mehanika polimerov.*- 1973.- № 5 - s.805-871.
5. *Zangvill U.I.* Nelineynoe programmirovaniye. Edinyiy podhod (Nonlinear programming. Unified approach) M.: Sov.radio.- 1973.- 312 s.
6. *Liu B.* Uncertain Programming Wiley New York.-1999.-201 p.
7. *Baoding Liu.* Theory and Practice of Uncertain Programming Physica-Verlag Heidelberg; A Springer –Verlag Company.- 2002. - 416 p.
8. DBN V.1.2-2:2006 Sistema zabezpechennya nadiynosti ta bezpeki budivelnih ob'ektiv (System for ensuring the reliability and safety of construction objects) «Navantazhennya i vplivi» K: Min. bud. Ukrainy, 2016. – 75 s.

Baranenko V.A., Volchok D.L.

INVERSE PROBLEM OF STRUCTURAL MECHANICS OF CYLINDRICAL SHELL REINFORCED WITH FIBERGLASS

There is formulation of the inverse problem of structural mechanics in the article. Optimal design of orthotropic cylindrical shell made of fiberglass, compressed with longitudinal forces is considered. The criterions of material-based restrictions are used. The restrictions are the strength, the local and overall buckling of the shell. The design variables are thickness, radius, and the relative content of reinforcing fibers. For the given compression force the analytical equations for the desired design parameters such as thickness, radius, relative content of reinforcing fibers and material volume (mass) of the shell are obtained. The convergence of the results using the Monte Carlo method was evaluated on the deterministic problem. An analysis of the influence of changes in the value of the compressive force on the value of the material minimum is made. The point of the value of the compressive force in which the minimum material volume function achieves its minimum is determined. On the basis of the theory of fuzzy sets and the obtained analytical solutions, a number of numerical experiments were carried out, in which the shell parameters were evaluated as a function of fuzzy value of force. As expected, the uncertainty in the original description of the data leads to an increase in the amount of the material. Implementation of tasks performed using the method of Lagrange multipliers and Monte Carlo method. According to the load the approach for coefficient of reliability estimation is proposed, taking into account the unfavorable deviation of the value and its real influence with the fuzzy description of the normative value. Model "load - bearing capacity" of the design is used. Investigation shows successful application of fuzzy sets and fuzzy modeling for described problem.

Keywords: inverse problem, cylindrical reinforced shell, fuzzy values, the optimal design of structures, uncertain programming , fuzzy modelling.

Бараненко В.А., Волчок Д.Л.

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА СТРОИТЕЛЬНОЙ МЕХАНИКИ АРМИРОВАННОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ ИЗ СТЕКЛОПЛАСТИКА

Рассматривается постановка обратной задачи строительной механики - оптимального проектирования ортотропной цилиндрической оболочки из стеклопластика, сжатой продольными силами по критерию материалоемкости с учётом ограничений по прочности, местной и общей потере устойчивости. Переменными проектирования является толщина, радиус и относительное содержание армирующих волокон. Реализация задачи выполнена с помощью методов множителей Лагранжа и Монте-Карло. Приводятся результаты численных экспериментов. Рассмотрено влияние нечёткого описания нагрузки на оптимальный проект. Приводится оценка коэффициента надёжности по нагрузке для некоторых случаев информационных ситуаций относительно описания нечёткой величины продольной силы.

Ключевые слова: обратная задача, цилиндрическая армированная оболочка, нечёткие величины, оптимальное проектирование конструкций, неопределённое программирование, нечёткое моделирование.

УДК 539.3+511.1

Бараненко В.О., Волчок Д.Л. Обернена задача будівельної механіки армованої циліндричної оболонки зі склопластику // Опір матеріалів і теорія споруд. – 2017. – Вип. 98. – С. 89-103.

Розглядається постановка оберненої задачі будівельної механіки - оптимального проектування ортотропної циліндричної оболонки зі склопластику, стисненої поздовжніми силами за критерієм матеріаломісткості з урахуванням обмежень по міцності, місцевій та загальній втраті стійкості.

Табл. 2. Іл. 6. Бібліогр. 8 назв.

Baranenko V.A., Volchok D.L. Inverse problem of structural mechanics of cylindrical shell reinforced with fiberglass // Strength of material and theory of structure. – 2017. – Issue 98. – P. 89-103. – Ukr.

There is formulation of the inverse problem of structural mechanics. Optimal design of orthotropic cylindrical shell made of fiberglass, compressed with longitudinal forces is considered.

Table 2. Fig. 6. Ref. 8

Бараненко В.А., Волчок Д.Л. Обратная задача строительной механики армированной цилиндрической оболочки из стеклопластика // Соппротивление материалов и теория сооружений. – 2017. – Вип. 98. – С. 89-103.

Рассматривается постановка обратной задачи строительной механики - оптимального проектирования ортотропной цилиндрической оболочки из стеклопластика, сжатой продольными силами по критерию материалоемкости с учётом ограничений по прочности, местной и общей потере устойчивости.

Табл. 2. Ил. 6. Библиогр. 8 назв.

Автор (науковий ступінь, вчене звання, посада): доктор технічних наук, професор
БАРАНЕНКО Валерій Олексійович

Адреса робоча: 49600, м. Дніпропетровськ, вул. Чернишевського, 24а ДВНЗ
"Придніпровська державна академія будівництва та архітектури, *БАРАНЕНКО Валерій Олексійович*

Адреса домашня: 49005 Україна, м. Дніпропетровськ, вул. Писаржевського 8а/70,
Бараненко Валерій Олексійович

Робочий тел.: +38(056)756342

Мобільний тел.: +38(066) 125-459-7

E-mail: baranenko1941@ukr.net

Автор (науковий ступінь, вчене звання, посада): кандидат технічних наук, доцент,
заступник декана факультету ПЦБ *ВОЛЧОК Денис Леонідович*

Адреса робоча: 49600, м. Дніпропетровськ, вул. Чернишевського, 24а ДВНЗ
"Придніпровська державна академія будівництва та архітектури, *ВОЛЧОК Денис Леонідович*

Адреса домашня: 49094 Україна, м. Дніпропетровськ, вул. Мандриківська 149/60, *ВОЛЧОК Денис Леонідович*

Робочий тел.: +38(056)7563422

Мобільний тел.: +38(066) 727-656-0

E-mail: Denys.L.Volchok@gmail.com