

УДК 539.3

НАПРУЖЕНИЙ СТАН ТОВСТИХ НЕКАНОНІЧНИХ ОБОЛОНОК ОБЕРТАННЯ, БЛИЗЬКИХ ДО СФЕРИЧНИХ, ПІД ДІЄЮ ПОВЕРХНЕВИХ СИЛ

В.М. Неміш¹

канд. фіз.-мат. наук, доцент кафедри економіко-математичних методів

Д.Г. Чернописький²

канд. фіз.-мат. наук, науковий співробітник

¹*Тернопільський національний економічний університет, м. Тернопіль*²*Івано-Франківський національний технічний університет нафти і газу, м. Івано-Франківськ*

На основі загального розв'язку рівнянь рівноваги для трансверсально-ізотропного середовища у сферичній системі координат у рамках другого варіанта методу збурення форми границі (МЗФГ) отримано з урахуванням перших трьох наближень розв'язки задачі про напружено-деформований стан (НДС) товстих оболонок обертання, обмежених поверхнями з малою амплітудою відхилення від сферичних. Згідно аналітичних розв'язків отримано числові дані, які дозволили провести аналіз напружено-деформованого стану оболонок під дією постійного або змінного осесиметричного (внутрішнього і зовнішнього) тиску. Залежно від геометричних параметрів рівнянь неканонічних поверхонь для різних форм оболонок показано їх вплив на перерозподіл напружень порівняно з випадком сферичної оболонки (канонічна форма – нульове наближення).

Ключові слова: товсті неканонічні оболонки, близькі до сферичних, постійний і змінний тиск.

Вступ

Замкнуті товсті оболонки як із сферичною так із близькою до неї неканонічною формою поверхонь мають широке застосування у вигляді резервуарів для зберігання зрідженого газу або нафтопродуктів. Інші елементи конструкцій у вигляді неканонічних оболонок з гофрованою формою поверхонь, рівняння яких у сферичній системі координат залежить від кута широти θ або довготи α , мають значний інтерес на предмет дослідження їх стійкості в умовах високого зовнішнього тиску. Зокрема, експериментальні дослідження у роботі [1] показали, що втрата стійкості гофрованої сферичної оболонки із поверхнею, рівняння якої залежить від координати α , мала місце тільки при величинах критичних навантажень у тричі більших ніж у випадку сферичної оболонки. Тому актуальними є дослідження величини концентрації напружень зумовленої різкою зміною кривизни неканонічної поверхні оболонки.

1. Постановка і методика розв'язання граничних задач про пружну рівновагу неканонічної оболонки обертання з неортогональними поверхнями

Розглядаються товстостінні пружні оболонки з внутрішньою S_0 і зовнішньою S_1 поверхнями, які задані рівняннями

$S_l \sim r = r_l + \varepsilon \omega_l f(\theta)$ ($r_0 \equiv 1$; $r_l = \text{const} > 1$, $\varepsilon \ll 1$, $-1 \leq \omega_l \leq 1$; $l = \overline{0,1}$), (1)
де r, θ, α — безрозмірні сферичні координати (θ — кут широти, α — довготи, ε — амплітуда відхилення неортогональної поверхні від сферичної ($r_0 = 1$ або $r = r_l$)). Комбінація параметрів ω_l ($\omega_l = \pm 1; 0$) у рівняннях (1) дозволила поверхні S_0 і S_1 оболонки умовно прийняти еквівалентними (еквідистантними), якщо відповідні напрямні косинуси n_{t0} і n_{t1} нормалей \vec{n}_0 і \vec{n}_1 ($t = r, \theta; n_{\alpha 0} = n_{\alpha 1} \equiv 0$) рівні за величиною і протилежні за знаком, тобто

$$n_{t0} = \cos(\vec{e}_{n0}, \vec{e}_t) = \cos[(\vec{e}_{n0}, \vec{e}_t) + \pi] = -n_{t1}. \quad (2)$$

До еквідистантних належать поверхні S_0, S_1 , які задані рівняннями (1) при значенні $\omega_l = \pm 1$, взятому одночасно, що відповідає оболонкам постійної товщини. Згідно параметричного рівняння (1) отримуємо вісім варіантів форм оболонок, які приведено у табл. 1.

Таблиця 1

| Варіанти оболонок | Рівняння внутрішньої поверхні $S_0 \sim \omega_0 = 0; \pm 1$ | Рівняння зовнішньої поверхні $S_1 \sim \omega_1 = 0; \pm 1$ |
|-------------------|--|---|
| I | $r = 1$ | $r = r_1 + \varepsilon f(\theta)$ |
| II | $r = 1 + \varepsilon f(\theta)$ | $r = r_1$ |
| III | $r = 1$ | $r = r_1 - \varepsilon f(\theta)$ |
| IV | $r = 1 - \varepsilon f(\theta)$ | $r = r_1$ |
| V | $r = 1 + \varepsilon f(\theta)$ | $r = r_1 + \varepsilon f(\theta)$ |
| VI | $r = 1 - \varepsilon f(\theta)$ | $r = r_1 - \varepsilon f(\theta)$ |
| VII | $r = 1 + \varepsilon f(\theta)$ | $r = r_1 - \varepsilon f(\theta)$ |
| VIII | $r = 1 - \varepsilon f(\theta)$ | $r = r_1 + \varepsilon f(\theta)$ |

При осевій симетрії форми поверхонь (1) оболонок і заданих на них відповідно осесиметричних зусиллях τ_{0t} і τ_{1t} , граничні умови мають вигляд

$$\begin{aligned} (\sigma_{rr} n_{r0} + \sigma_{r\theta} n_{\theta 0})_{S_{0, I-VIII}} &= \tau_{r0}; \quad (\sigma_{r\theta} n_{r0} + \sigma_{\theta\theta} n_{\theta 0})_{S_{0, I-VIII}} = \tau_{\theta 0}; \\ (\sigma_{rr} n_{r1} + \sigma_{r\theta} n_{\theta 1})_{S_{1, I-VIII}} &= \tau_{r1}; \quad (\sigma_{r\theta} n_{r1} + \sigma_{\theta\theta} n_{\theta 1})_{S_{1, I-VIII}} = \tau_{\theta 1}, \end{aligned} \quad (3)$$

де $\tau_{il} = \bar{\tau}_i \cdot \bar{e}_l$ ($\bar{e}_r, \bar{e}_\theta$ — одиничні орти координатних осей). При цьому вектори зовнішніх зусиль $\bar{\tau}_l$ ($\tau_{rl}, \tau_{\theta l}$ — проекції вектора), заданих на граничних поверхнях, допускають представлення

$$\bar{\tau}_i = \pm |\tau_i| \bar{e}_{ni}, \quad (4)$$

де знак “+” відповідають розтягуючі зусилля, а “-” — стискаючі.

Напрявні косинуси $n_{rl}, n_{\theta l}$ одиничної нормалі \bar{e}_{nl} для внутрішньої ($\bar{e}_{n0} = n_{r0} \bar{e}_r + n_{\theta 0} \bar{e}_\theta$) і зовнішньої ($\bar{e}_{n1} = n_{r1} \bar{e}_r + n_{\theta 1} \bar{e}_\theta$) поверхонь згідно [2] визначаються формулами

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} n_{r1} \\ n_{\theta 1} \end{pmatrix} &= \pm r \left[r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta} \right)^2 \right]^{-\frac{1}{2}}; \\ \begin{pmatrix} n_{\theta 1} \\ n_{r0} \end{pmatrix} &= \mp \frac{dr}{d\theta} \left[r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta} \right)^2 \right]^{-\frac{1}{2}}; \quad n_{0\alpha} = n_{1\alpha} \equiv 0 \text{ при } r = r_l + \varepsilon \omega_l f(\theta). \end{aligned} \quad (5)$$

Задовільнити крайовим умовам (3) безпосередньо неможливо, тому що в даній постановці задачі по крайній мірі одна із граничних поверхонь (1) є некоординатною, тому у випадку осевої симетрії розв’язки поставленої задачі для переміщень і напружень у довільному наближенні мають вигляд ($t = r, \theta; m = r, \theta, \alpha$)

$$u_t = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n u_t^{(n)} + O(\varepsilon^3), \quad \sigma_{mt} = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n \sigma_{mt}^{(n)} + O(\varepsilon^3). \quad (6)$$

Припускаємо, що задані на границі зусилля і форма поверхонь оболонки S_0 і S_1 згідно рівнянь (1) є такими, що шукані переміщення і напруження (6) на граничних поверхнях допускають розкладання у ряди Тейлора в околі $r = 1, r = r_l$ ($r_l > 1; l = 0, 1$)

$$(u_t, \sigma_{mt})_{S_l} = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n \sum_{s=0}^n \frac{\omega_l^s f^s(\theta)}{s!} \left[\frac{\partial^s}{\partial r^s} (u_t^{(n-s)}, \sigma_{mt}^{(n-s)}) \right]_{r=r_l}. \quad (7)$$

Якщо згідно (1) надати змінній r у виразах (6) значення $r = r_l + \varepsilon \omega_l f(\theta)$ і перейти до їх розкладу у ряди за степенями ε , то у довільному наближенні отримаємо згідно (7) формули для напрямних косинусів $n_{rl}, n_{\theta l}$ нормалі \bar{e}_{nl} для поверхні S_l

$$n_{r,l} = \sum_{v=0}^{\infty} \varepsilon^v \left[\gamma_{v,l} + \frac{\omega_l f(\theta)}{r_l} \gamma_{v-1,l} \right]; \quad n_{\theta l} = -\frac{\omega_l}{r_l} \frac{df(\theta)}{d\theta} \sum_{v=1}^{\infty} \varepsilon^v \gamma_{v-1,l}, \quad \gamma_{-1,l} \equiv 0, \quad (8)$$

де

$$\gamma_{m,l} = \sum_{k=0}^m \sum_{n=0}^k (-1)^k \frac{k!(2k-1)!}{(k-n)!n!(2k)!!} A_l^{k-n} B_l^{k-n} \quad k+n=m,$$

$$A_l = 2\omega_l \frac{f}{r_l}, \quad B_l = \frac{\omega_l^2}{r_l^2} \left[f^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial \theta} \right)^2 \right].$$

Зауважимо, що згідно оцінок [2] область збіжності функціонального ряду визначається через значення величин A_l, B_l із (8) і залежить від геометричних параметрів рівнянь (1) щодо умов застосування МЗФГ для розрахунку НДС оболонок обертання з неканонічними поверхнями.

Якщо вектор зовнішніх зусиль у вигляді (4) спроекувати на координатні осі

$$\begin{aligned} \bar{\tau}_l \cdot \bar{e}_r &= \pm |\tau_l| \bar{e}_{nl} \cdot \bar{e}_r = \pm |\tau_l| n_{rl} = \tau_{rl}, \\ \bar{\tau}_l \cdot \bar{e}_\theta &= \pm |\tau_l| \bar{e}_{nl} \cdot \bar{e}_\theta = \pm |\tau_l| n_{\theta l} = \tau_{\theta l}, \end{aligned} \quad (9)$$

то на основі виразів (8) його компоненти можна отримати у вигляді рядів за степенями ε

$$\begin{aligned} \tau_{rl} &= \pm |\tau_l| \sum_{v=0}^{\infty} \varepsilon^v \left[\gamma_{v,l} + \frac{\omega_l f(\theta)}{r_l} \gamma_{v-1,l} \right], \\ \tau_{\theta l} &= \pm |\tau_l| \left[-\frac{\omega_l}{r_l} \frac{df(\theta)}{d\theta} \sum_{v=1}^{\infty} \varepsilon^v \gamma_{v-1,l} \right], \end{aligned} \quad (10)$$

Тоді на основі (3) і розкладів (8), (10) у довільному наближенні граничні умови отримаємо у вигляді ($j = r, \theta$)

$$\left\{ \sigma_{rj}^{(n)} + \sum_{s=1}^n \left[D_{1l}^{(s)} \sigma_{rj}^{(n-s)} + D_{2l}^{(s)} \sigma_{\theta j}^{(n-s)} \right] \right\} \Big|_{r=r_l} = \tau_{jl}^{(n)}, \quad (11)$$

$$n \geq 1, \quad l = 0 \sim r = 1; \quad l = 1 \sim r = r_l.$$

Тут $D_{1l}^{(s)}, D_{2l}^{(s)}$ – диференціальні оператори визначаються для кожної із граничних поверхонь (1) через функцію $f(\theta)$ і у довільному наближенні для осесиметричних задач мають вигляд

$$\begin{aligned} L_l^{(s)} &= \frac{\omega_l^s f^s}{s!} \frac{\partial}{\partial r^s}, \quad D_{1l}^{(s)} = \sum_{k=0}^s \left(\gamma_{v,l} + \frac{\omega_l f(\theta)}{r_l} \gamma_{v-1,l} \right) L_l^{(s-k)}, \\ D_{2l}^{(s)} &= -\frac{\omega_l}{r_l} \frac{\partial f}{\partial \theta} \sum_{k=1}^s \gamma_{k-1,l} L_l^{(s-k)}. \end{aligned} \quad (12)$$

Для розв'язку поставленої вище задачі обмежимося першими трьома наближеннями. Тоді згідно з [2] вирази для переміщень і напружень відповідно мають вигляд ($t = r, \theta; m = r, \theta, \alpha$)

$$u_l = \sum_{n=0}^2 \varepsilon^n u_l^{(n)} + O(\varepsilon^3), \quad \sigma_{ml} = \sum_{n=0}^2 \varepsilon^n \sigma_{ml}^{(n)} + O(\varepsilon^3) \quad (13)$$

і на граничних поверхнях неканонічних поверхнях S_0 і S_1

$$(u_l, \sigma_{ml})_{S_l} = \sum_{n=0}^2 \varepsilon^n \sum_{s=0}^n \frac{\omega_l^s f^s(\theta)}{s!} \left[\frac{\partial^s}{\partial r^s} (u_l^{(n-s)}, \sigma_{ml}^{(n-s)}) \right]_{r=r_l} + O(\varepsilon^3)$$

при $r = 1, r = r_1$ ($r_1 > 1; l = 0, 1$).

Згідно (9) у перших трьох наближень отримаємо розклади за степенями ε напрямних косинусів $n_{1r}, n_{1\theta}$ для нормалі \bar{e}_{1n} зовнішньої поверхні S_1

$$\begin{aligned} n_{r1} &= \cos(\bar{e}_{n1}, \bar{e}_r) = \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon + \alpha_2 \varepsilon^2 + O(\varepsilon^3), \\ n_{\theta 1} &= \cos(\bar{e}_{n1}, \bar{e}_\theta) = \beta_0 + \beta_1 \varepsilon + \beta_2 \varepsilon^2 + O(\varepsilon^3), \end{aligned} \quad (14)$$

де

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= 1, \quad \alpha_1 = 0, \quad \alpha_2 = -\frac{\omega_1^2}{2r_1^2} \left[\frac{df(\theta)}{d\theta} \right]^2, \\ \beta_0 &= 0, \quad \beta_1 = -\frac{\omega_1}{r_1} \frac{df(\theta)}{d\theta}, \quad \beta_2 = \frac{\omega_1^2}{r_1^2} f(\theta) \frac{df(\theta)}{d\theta}. \end{aligned}$$

Вирази напрямних косинусів $n_{r0}, n_{\theta 0}$ одиничної нормалі \bar{e}_{0n} для внутрішньої поверхні S_0 отримаємо із (14) при значенні $r_1 = 1$, тобто

$$\begin{aligned} n_{r0} &= -\cos(\bar{e}_{n0}, \bar{e}_r) = \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon + \alpha_2 \varepsilon^2 + O(\varepsilon^3), \\ n_{\theta 0} &= -\cos(\bar{e}_{n0}, \bar{e}_\theta) = \beta_0 + \beta_1 \varepsilon + \beta_2 \varepsilon^2 + O(\varepsilon^3), \end{aligned} \quad (15)$$

де

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= -1, \quad \alpha_1 = 0, \quad \alpha_2 = \frac{\omega_0^2}{2} \left[\frac{df(\theta)}{d\theta} \right]^2, \\ \beta_0 &= 0, \quad \beta_1 = \omega_0 \frac{df(\theta)}{d\theta}, \quad \beta_2 = -\omega_0^2 f(\theta) \frac{df(\theta)}{d\theta}. \end{aligned}$$

Згідно умов (10) вважаємо, що товстостінна ізотропна або трансверсально-ізотропна оболонки виду I—VIII знаходяться під дією внутрішнього $\bar{\tau}_0$ і зовнішнього $\bar{\tau}_1$ тиску

$$\bar{\tau}_0|_{S_0} = -\sigma_0 \bar{e}_{n0}; \quad \bar{\tau}_1|_{S_1} = -\sigma_1 \bar{e}_{n1}, \quad (16)$$

де σ_0, σ_1 - величини інтенсивності.

Тоді згідно (14)-(16) представимо розклад проєкцій зусиль на зовнішній поверхні в ряди по степенях ε у вигляді

$$\begin{aligned} F_{1r} &= F_{1r}^{(0)} + \varepsilon F_{1r}^{(1)} + \varepsilon^2 F_{1r}^{(2)} + O(\varepsilon^3), \\ F_{1\theta} &= F_{1\theta}^{(0)} + \varepsilon F_{1\theta}^{(1)} + \varepsilon^2 F_{1\theta}^{(2)} + O(\varepsilon^3), \end{aligned} \quad (17)$$

де

$$\begin{aligned} F_{1r}^{(0)} &= -\sigma_1, \quad F_{1r}^{(1)} = 0, \quad F_{1r}^{(2)} = \frac{\omega_1^2 \sigma_1}{2r_1^2} \left[\frac{df(\theta)}{d\theta} \right]^2; \\ F_{1\theta}^{(0)} &= 0, \quad F_{1\theta}^{(1)} = \frac{\omega_1}{r_1} \frac{df(\theta)}{d\theta}, \quad F_{1\theta}^{(2)} = -\frac{\omega_1^2 \sigma_1}{r_1^2} f(\theta) \frac{df(\theta)}{d\theta}, \end{aligned}$$

на внутрішній поверхні

$$\begin{aligned} F_{0r} &= F_{0r}^{(0)} + \varepsilon F_{0r}^{(1)} + \varepsilon^2 F_{0r}^{(2)} + O(\varepsilon^3), \\ F_{0\theta} &= F_{0\theta}^{(0)} + \varepsilon F_{0\theta}^{(1)} + \varepsilon^2 F_{0\theta}^{(2)} + O(\varepsilon^3), \end{aligned} \quad (18)$$

де

$$\begin{aligned} F_{0r}^{(0)} &= \sigma_0, \quad F_{0r}^{(1)} = 0, \quad F_{0r}^{(2)} = -\frac{\omega_0^2 \sigma_0}{2} \left[\frac{df(\theta)}{d\theta} \right]^2; \\ F_{0\theta}^{(0)} &= 0, \quad F_{0\theta}^{(1)} = -\omega_0 \sigma_0 \frac{df(\theta)}{d\theta}, \quad F_{0\theta}^{(2)} = \omega_0^2 \sigma_0 f(\theta) \frac{df(\theta)}{d\theta}. \end{aligned}$$

Таким чином, на основі співвідношень (11), (12), (14) і розкладів у ряди (15), (16) і (17), (18) у перших трьох наближеннях граничні умови на поверхнях оболонок різної форми (табл. 1; варіанти I–VIII) отримуємо для напружень на зовнішній поверхні у наступному вигляді:

$$\begin{aligned} \sigma_{rr}^{(0)} \Big|_{r=r_1} &= -\sigma_1; \quad \sigma_{rr}^{(1)} \Big|_{r=r_1} = -[D_{11}^{(1)} \sigma_{rr}^{(0)} + D_{21}^{(1)} \sigma_{r\theta}^{(0)}]_{r=r_1} + F_{1r}^{(1)}; \\ \sigma_{r\theta}^{(1)} \Big|_{r=r_1} &= -[D_{11}^{(1)} \sigma_{r\theta}^{(0)} + D_{21}^{(1)} \sigma_{\theta\theta}^{(0)}]_{r=r_1} + F_{1\theta}^{(1)}; \\ \sigma_{rr}^{(2)} \Big|_{r=r_1} &= -[(D_{11}^{(1)} \sigma_{rr}^{(1)} + D_{21}^{(1)} \sigma_{r\theta}^{(1)}) + D_{11}^{(2)} \sigma_{rr}^{(0)} + D_{21}^{(2)} \sigma_{r\theta}^{(0)}]_{r=r_1} + F_{1r}^{(2)}; \\ \sigma_{r\theta}^{(2)} \Big|_{r=r_1} &= -[(D_{11}^{(1)} \sigma_{r\theta}^{(1)} + D_{21}^{(1)} \sigma_{\theta\theta}^{(1)}) + D_{11}^{(2)} \sigma_{r\theta}^{(0)} + D_{21}^{(2)} \sigma_{\theta\theta}^{(0)}]_{r=r_1} + F_{1\theta}^{(2)}; \end{aligned} \quad (19)$$

на внутрішній поверхні

$$\begin{aligned} \sigma_{rr}^{(0)} \Big|_{r=1} &= \sigma_0; \quad \sigma_{r\theta}^{(0)} \Big|_{r=1} = 0; \quad \sigma_{rr}^{(1)} \Big|_{r=1} = -[D_{10}^{(1)} \sigma_{rr}^{(0)} + D_{20}^{(1)} \sigma_{r\theta}^{(0)}]_{r=1} + F_{0r}^{(1)}; \\ \sigma_{r\theta}^{(1)} \Big|_{r=1} &= -[D_{10}^{(1)} \sigma_{r\theta}^{(0)} + D_{20}^{(1)} \sigma_{\theta\theta}^{(0)}]_{r=1} + F_{0\theta}^{(1)}; \\ \sigma_{rr}^{(2)} \Big|_{r=1} &= -[(D_{10}^{(1)} \sigma_{rr}^{(1)} + D_{20}^{(1)} \sigma_{r\theta}^{(1)}) + D_{10}^{(2)} \sigma_{rr}^{(0)} + D_{20}^{(2)} \sigma_{r\theta}^{(0)}]_{r=1} + F_{0r}^{(2)}; \\ \sigma_{r\theta}^{(2)} \Big|_{r=1} &= -[(D_{10}^{(1)} \sigma_{r\theta}^{(1)} + D_{20}^{(1)} \sigma_{\theta\theta}^{(1)}) + D_{10}^{(2)} \sigma_{r\theta}^{(0)} + D_{20}^{(2)} \sigma_{\theta\theta}^{(0)}]_{r=1} + F_{0\theta}^{(2)}. \end{aligned} \quad (20)$$

Тут $D_{1l}^{(s)}, D_{2l}^{(s)}$ ($s = 1, 2; l = 0, 1$) – диференціальні оператори, які у перших трьох наближеннях мають вигляд

$$D_{1l}^{(0)} = 1; D_{2l}^{(0)} \equiv 0 \quad (r_0 \equiv 1; r_1); \quad D_{1l}^{(1)} = \omega_l f(\theta) \frac{\partial}{\partial r}, \quad D_{2l}^{(1)} = -\frac{\omega_l}{r_l} f'(\theta);$$

$$D_{2l}^{(2)} = \frac{\omega_l^2}{r_l} f(\theta) f'(\theta) \left(\frac{1}{r_l} - \frac{\partial}{\partial r} \right), \quad f'(\theta) = \frac{df}{d\theta}. \quad (21)$$

Отже, параметрична форма представлення рівнянь поверхонь (1) і диференціальних операторів (21), коефіцієнтів розкладу зовнішніх зусиль у ряди за ε дозволило у перших трьох наближеннях отримати граничні умови та розробити загальний алгоритм розрахунку НДС ряду ізотропних і трансверсально ізотропних оболонок із складною геометричною формою поверхонь, що знаходяться під дією внутрішнього або зовнішнього тиску.

За вихідне нульове наближення $\sigma_{mn}^{(0)}$ береться точний розв'язок відповідної граничної задачі для порожнинної сфери. Згідно умов (19), (20) розв'язок задачі у першому і другому наближенні зводиться до розв'язку послідовності просторових задач для порожнинної сфери. При цьому для побудови граничних умов у кожному із наступних наближень використовуємо розв'язки, які отримані у попередніх наближеннях. По аналогії з нульовим зберігається аналітична структура розв'язків у вищих наближеннях, які автоматично задовільняють рівнянням рівноваги. Це дозволяє ефективно застосувати МЗФГ при визначенні НДС товстих неканонічних оболонок у випадках коли відповідні просторові граничні задачі допускають у сферичних координатах точні аналітичні розв'язки у нульовому наближенні для ізотропного і трансверсально ізотропного матеріалу.

2. Загальні розв'язки рівнянь рівноваги у вищих наближеннях

Зазначемо, що основна перевага варіантів МЗФГ [2] у розв'язку задач пружності для тіл з неканонічними поверхнями над іншими наближеними аналітичними методами полягає у збереженні вигляду структури рівнянь рівноваги при переході побудови розв'язків від попередніх до наступних наближень.

Вважаємо, що матеріал пружного тіла має трансверсально ізотропні властивості відносно довільного радіуса-вектора, який проведений із загального центру сфер в дану точку (сферична ізотропія). Для осесиметричних задач у випадку трансверсально ізотропних тіл у формі оболонок з осьовою симетрією поверхонь відносно осі z під дією осесиметричних сил у довільному наближенні переміщення $u_r^{(j)}, u_\theta^{(j)}$ ($u_\alpha^{(j)} \equiv 0$). Згідно з [4] допускають через потенціальні функції $\Phi_n^{(j)}(r, \theta)$ представлення у вигляді

$$u_r^{(j)} = \sum_{n=0}^{\infty} k_n \frac{\partial \Phi_n^{(j)}}{\partial r}; \quad u_{\theta}^{(j)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi_n^{(j)}}{\partial \theta}, \quad k_n = \text{const.} \quad (22)$$

Якщо скористатись зв'язком переміщення-деформації згідно узагальненого закону Гука для трансверсально-ізотропного тіла, то в сферичній системі координат вирази для компонент тензора напружень у вигляді

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_{rr}^{(j)} \\ \sigma_{\theta\theta}^{(j)} + \sigma_{\alpha\alpha}^{(j)} \end{array} \right\} = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\begin{array}{l} c_{13} \\ c_{11} + c_{12} \end{array} \right] \left(\Pi_1 + \frac{2k_n}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) + \left[\begin{array}{l} c_{33} \\ 2c_{13} \end{array} \right] k_n \frac{\partial^2}{\partial r^2} \Phi_n^{(j)},$$

$$\sigma_{\theta\theta}^{(j)} - \sigma_{\alpha\alpha}^{(j)} = (c_{11} - c_{12}) \sum_{n=0}^{\infty} \Pi_2 \Phi_n^{(j)}; \quad \sigma_{r\theta}^{(j)} = c_{44} \sum_{n=0}^{\infty} \Pi_3 \Phi_n^{(j)}, \quad (23)$$

де диференціальні оператори Π_i ($i = 1, 2, 3$) визначаються виразами

$$\left(\begin{array}{l} \Pi_1 \\ \Pi_2 \end{array} \right) = \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \pm \text{ctg} \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right); \quad \Pi_3 = \frac{1}{r} \left[(1 + k_n) \frac{\partial^2}{\partial r \partial \theta} - \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \right];$$

c_{lm} – пружні поєйні. При цьому потенціальні функції $\Phi_n^{(j)}(r, \theta)$ визначаються виразами

$$\Phi_n^{(j)}(r, \theta) = r^{v_{ni} + \frac{1}{2}} P_n(p), \quad p = \cos \theta, \quad (24)$$

а їх вигляд істотно залежить від значень v_{ni} коренів характеристичного рівняння

$$v_n^4 - 2a_n v_n^2 + b_n = 0, \quad (25)$$

яке слідує із однорідних рівнянь рівноваги. Коефіцієнти a_n, b_n рівняння (25) залежать від пружних постійних c_{lm} трансверсально ізотропного матеріалу, індекса n полінома Лежандра $P_n(p)$. Відповідно до значення виразу виразу $(a_n^2 - b_n)^{1/2}$ корені рівняння v_{ni} ($i = 1, 2, 3, 4$) можуть бути дійсними (різні, кратні) або комплексними для яких справедливі вирази

$$\left(\begin{array}{l} v_{n1} \\ v_{n2} \end{array} \right) = \pm [a_n + (a_n^2 - b_n)^{1/2}]^{1/2}; \quad \left(\begin{array}{l} v_{n3} \\ v_{n4} \end{array} \right) = \pm [a_n - (a_n^2 - b_n)^{1/2}]^{1/2}.$$

Постійна величина k_{ni} у виразах (23) приймає значення

$$k_{ni} = \frac{c_{11} n(n+1) - c_{44} (v_{ni}^2 - \frac{1}{4}) + c^+}{(v_{ni} + \frac{1}{2}) \left[(c_{13} + c_{44}) (v_{ni} - \frac{1}{2}) + c^+ \right]}.$$

У роботі [3] для кожного із окремих значень коренів приведено детальний аналіз побудови загальних розв'язків рівнянь рівноваги через потенціальні функції типу (24) у випадку неосесиметричних задач.

Загальним у побудові МЗФГ наближених розв'язків задач для неканонічних областей, близьких до сферичних, із застосуванням диференціальних операторів (12) або (21) є ріст індекса n поліномів Лежандра у кожному із наступних наближень.

При числових розрахунках НДС неканонічних тіл безпосередньо отримуємо широкий діапазон зміни величин елементів (коефіцієнтів) матриць при невідомих алгебраїчних систем, отриманими із граничних умов (19), (20) на згідно виразів для переміщень (22) і напружень (23). Зокрема, одна група величин елементів типу $r^{v_{ni}+1/2}$ при $v_{ni} > 0$ прямує до ∞ при $n \rightarrow \infty$, а інша для $v_{ni} < 0$ при $n \rightarrow \infty$ до 0. Такий діапазон зміни величин елементів матриць складає проблему числового розв'язку алгебраїчних систем рівнянь з погано обумовленими матрицями. Тому для розрахунків НДС неканонічних товстих оболонок доцільно шукати загальні розв'язки через $\Phi_n^{(j)}(\theta, r)$ у кожному із наближень, наприклад, у випадку дійсних і різних коренів у вигляді

$$\Phi_n^{(j)}(\theta, r) = \begin{bmatrix} \tilde{A}_{n1}^{(j)} \left(\frac{r}{r_1} \right)^{v_{n1}^{(j)}+1/2} + B_{n2}^{(j)} r^{v_{n2}^{(j)}+1/2} + \\ + \tilde{A}_{n3}^{(j)} \left(\frac{r}{r_1} \right)^{v_{n3}^{(j)}+1/2} + B_{n4}^{(j)} r^{v_{n4}^{(j)}+1/2} \end{bmatrix} P_n(\cos \theta), \quad (26)$$

де $\tilde{A}_{ni}^{(j)} = A_{ni}^{(j)} r_1^{v_{ni}^{(j)}+1/2}$ ($i = 1, 3$); $B_{ni}^{(j)}$ ($i = 2, 4$) – довільні постійні, які визначаються із граничних умов; r_1 – зовнішній радіус порожнинної сфери.

Для побудови аналітичних розв'язків запропоновано представлення потенціальних функцій у вигляді (26). Такий підхід дозволив у довільному наближенні згідно граничних умов типу (19), (20) для визначення невідомих $\tilde{A}_{ns}^{(j)}, B_{ns}^{(j)}$ ($s = 1, 2$) отримати алгебраїчні системи рівнянь з обмеженими по величині елементами матриць $|a_{ij}| \leq 1$ на відміну від випадку використання членів розв'язку у вигляді $A_{ns}^{(j)} r^{v_{ns}+1/2}$ для яких число v_{ns} із збільшенням номера наближень істотно зростає.

Користуючись рекурентними співвідношеннями для поліномів Лежандра, згідно з формулами (22), (23) у випадку осесиметричних однорідних рівнянь рівноваги в j -му наближенні отримуємо вирази для переміщень

$$u_{r,o}^{(j)}(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\sum_{i=1,3} \tilde{A}_{ni}^{(j)} (r/r_1)^{\nu_{ni}-\frac{1}{2}} + \sum_{i=2,4} B_{ni}^{(j)} (r)^{\nu_{ni}-\frac{1}{2}} \right] P_n(p),$$

$$u_{\theta,o}^{(j)}(r, \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\sum_{i=1,3} \tilde{A}_{ni}^{(j)} k_{ni} (r/r_1)^{\nu_{ni}-\frac{1}{2}} + \sum_{i=2,4} B_{ni}^{(j)} k_{ni} (r)^{\nu_{ni}-\frac{1}{2}} \right] \frac{dP_n(p)}{dp}. \quad (27)$$

і напружень

$$\sigma_{rr,o}^{(j)}(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\sum_{i=1,3} \tilde{A}_{ni}^{(j)} \gamma_{ni} (r/r_1)^{\nu_{ni}-\frac{3}{2}} + \sum_{i=2,4} B_{ni}^{(j)} \gamma_{ni} (r)^{\nu_{ni}-\frac{3}{2}} \right] P_n(p),$$

$$\sigma_{r\theta,o}^{(j)}(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\sum_{i=1,3} \tilde{A}_{ni}^{(j)} \delta_{ni} (r/r_1)^{\nu_{ni}-\frac{3}{2}} + \sum_{i=2,4} B_{ni}^{(j)} \delta_{ni} (r)^{\nu_{ni}-\frac{3}{2}} \right] \frac{dP_n(p)}{dp},$$

$$\sigma_{\theta\theta,o}^{(j)}(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \sum_{i=1,3} \tilde{A}_{ni}^{(j)} (r/r_1)^{\nu_{ni}-\frac{3}{2}} [\eta_{ni} P_n(p) + (c_{11} - c_{12}) p P_n'(p)] + \right.$$

$$\left. + \sum_{i=2,4} B_{ni}^{(j)} (r)^{\nu_{ni}-\frac{3}{2}} [\eta_{ni} P_n(p) + (c_{11} - c_{12}) p P_n'(p)] \right\},$$

$$\sigma_{\alpha\alpha,o}^{(j)}(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \sum_{i=1,3} \tilde{A}_{ni}^{(j)} (r/r_1)^{\nu_{ni}-\frac{3}{2}} [q_{ni} P_n(p) + (c_{11} - c_{12}) p P_n'(p)] + \right.$$

$$\left. + \sum_{i=2,4} B_{ni}^{(j)} (r)^{\nu_{ni}-\frac{3}{2}} [q_{ni} P_n(p) + (c_{11} - c_{12}) p P_n'(p)] \right\}, \quad (28)$$

де

$$\begin{pmatrix} \eta_{ni} \\ q_{ni} \end{pmatrix} = k_{ni} [c_{11} + c_{12} + (\nu_{ni} - \frac{1}{2})] - n(n+1) \begin{pmatrix} c_{11} \\ c_{12} \end{pmatrix}, \quad P_n'(p) = \frac{P_n(p)}{dp},$$

$$\gamma_{ni} = k_{ni} [2c_{13} + c_{33}(\nu_{ni} - \frac{1}{2})] - n(n+1)c_{13}, \quad \delta_{ni} = c_{44}(k_{ni} + \nu_{ni} - \frac{3}{2}).$$

Якщо у виразах (27), (28) невідомі постійні $B_{ni}^{(j)}$ ($i = 2, 4$) покласти рівними нулю, то отримуємо розв'язки задачі про концентрацію напружень у середовищі з неканонічним включенням, а у випадку $\tilde{A}_{ni}^{(j)} = 0$ ($i = 1, 3$) – з порожниною.

З урахуванням перших трьох наближень компоненти вектора переміщень і тензора напружень у внутрішніх точках неканонічних оболонок з точністю до $O(\varepsilon^3)$ визначаються на основі формул (12), а на граничних поверхнях і поверхнях рівня $r = r_* + \omega_j \varepsilon f(\theta)$ при $1 \leq r_* \leq r_1$ – згідно з (13).

На площадках неканонічних граничних поверхонь з нормалю n і дотичними в точці її основи векторами τ та s переміщення визначаються за формулами

$$\begin{aligned} u_n &= u_r n_r + u_\theta n_\theta; \quad u_s = -u_r n_\theta + n_r u_\theta; \\ \sigma_{nn} &= \sigma_{rr} n_r^2 + \sigma_{\theta\theta} n_\theta^2 + 2\sigma_{r\theta} n_r n_\theta; \\ \sigma_{ss} &= \sigma_{\theta\theta} n_r^2 + \sigma_{rr} n_\theta^2 - 2\sigma_{r\theta} n_r n_\theta; \\ \sigma_{ns} &= (\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{rr}) n_r n_\theta + \sigma_{r\theta} (n_r^2 - n_\theta^2), \end{aligned} \quad (29)$$

де на неканонічних поверхнях складові для переміщень і напружень у правих частинах (29) визначаються за формулами (13).

3. Числові розрахунки НДС неканонічних товстостінних оболонок під дією внутрішнього і зовнішнього тиску

Для ізотропних і трансверсально ізотропних оболонок різної конфігурації з граничними поверхнями, близькими до сферичних, що описуються рівняннями у параметричному вигляді (табл.1; варіанти I—VIII), виконано ряд числових розрахунків НДС під дією постійного і змінного внутрішнього або зовнішнього тиску, що змінюється за законом

$$\begin{aligned} \sigma_0|_{S_0} &= (\sigma_{10} + \sigma_{20} \cos 2\theta), \\ \sigma_1|_{S_1} &= -(\sigma_{11} + \sigma_{21} \cos 2\theta), \\ \sigma_{i0}, \sigma_{i1} &= \text{const}, \quad i = 0, 1. \end{aligned} \quad (30)$$

Розрахунки отримано для ізотропних оболонок при $\varepsilon = 0, 1$; $\nu = 0, 25$ (ν — коефіцієнт Пуассона). Зазначимо, для ізотропного матеріалу корені характеристичного рівняння (25) визначаються за формулами

$$\begin{pmatrix} v_{n1}^{(n)} \\ v_{n2}^{(n)} \end{pmatrix} = \pm \left(n + \frac{3}{2} \right), \quad \begin{pmatrix} v_{n3}^{(n)} \\ v_{n4}^{(n)} \end{pmatrix} = \pm \left(n - \frac{1}{2} \right). \quad (31)$$

На рис. 2, 3 показано розподіл меридіональних $\sigma_{\theta\theta} / \sigma_{10}$ і кільцевих напружень $\sigma_{\alpha\alpha} / \sigma_{10}$ залежно від кута θ на внутрішній і зовнішній поверхнях оболонки виду IV (рис. 1, $\omega_0 = -1$; $\omega_1 = 0$) під дією постійного внутрішнього тиску. При цьому штрихові лінії відповідають розподілу напружень у порожнинній сфері ($\varepsilon = 0$). Змінна товщина оболонки на рис. 1, збільшення товщини $\delta|_{\theta=0} = r_1 - 1 + \varepsilon$ в полюсі та значне зменшення $\delta|_{\theta=\frac{\pi}{2}} = r_1 - 1 - \varepsilon$ на

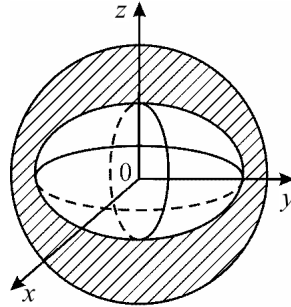


Рис. 1

екваторі (за рахунок зміни неканонічної форми внутрішньої поверхні) ілюструє (суцільні лінії) значний істотний перерозподіл величини напружень порівняно із сферичною оболонкою (канонічна форма – штрихові лінії). При заданих вище геометричних розмірах, товщина оболонки на екваторі у два рази менша за товщину в полюсі.

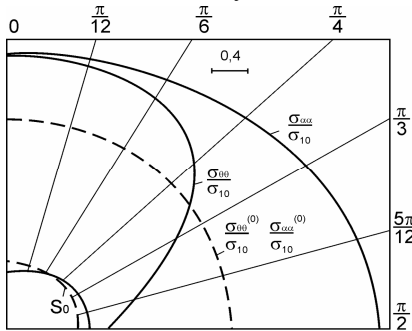


Рис. 2

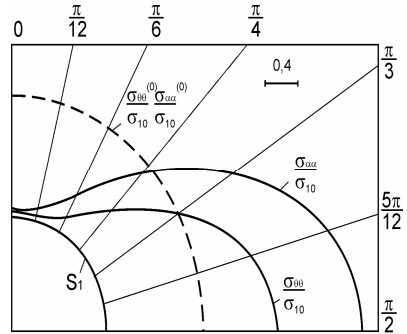


Рис. 3

На екваторі зі сторони внутрішньої поверхні неканонічної поверхні напруження меридіональні для неканонічної оболонки рівні значенням $\sigma_{\theta\theta}/\sigma_{10}=0,248$ і $\sigma_{\theta\theta}^{(0)}/\sigma_{10}=1,753$ та відповідно для кільцевих $\sigma_{\alpha\alpha}/\sigma_{10}=3,359$ і $\sigma_{\alpha\alpha}^{(0)}/\sigma_{10}=1,753$ (збільшення величини напруження у 1,9 рази). На зовнішній поверхні напруженням відповідають значення $\sigma_{\theta\theta}/\sigma_{10}=2,163$ і $\sigma_{\theta\theta}^{(0)}/\sigma_{10}=1,253$ (збільшення у 1,7 рази) та $\sigma_{\alpha\alpha}/\sigma_{10}=3,241$ і $\sigma_{\alpha\alpha}^{(0)}/\sigma_{10}=1,253$ (збільшення у 2,59 рази).

На полюсі зі сторони внутрішньої поверхні неканонічної поверхні меридіональні і кільцеві напруження для неканонічної оболонки рівні значенням $\sigma_{\theta\theta}^{(0)}/\sigma_{10} = \sigma_{\alpha\alpha}^{(0)}/\sigma_{10} = 1,753$; $\sigma_{\theta\theta}/\sigma_{10} = \sigma_{\alpha\alpha}/\sigma_{10} = 2,654$ (збільшення у 1,46 рази) та відповідно на зовнішній поверхні $\sigma_{\theta\theta}^{(0)}/\sigma_{10} = \sigma_{\alpha\alpha}^{(0)}/\sigma_{10} = 1,253$; $\sigma_{\theta\theta}/\sigma_{10} = \sigma_{\alpha\alpha}/\sigma_{10} = 0,011$ (істотне зменшення величини напружень). Приведені дані для неканонічної оболонки з складною формою граничних поверхонь ілюструють значний вплив зміни товщини на перерозподіл величини напружень порівняно із сферичною формою оболонки.

У табл. 2 наведені числові результати зміни величини максимальних кільцевих напружень в оболонці (рис. 1), які характеризують швидку збіжність ітераційного процесу при збільшенні параметра товщини r_1 .

Таблиця 2

| r_1 | Наближення ($\theta = \pi/2$; S_0 , IV) | | | | | | $\frac{\sigma_{\alpha\alpha}}{\sigma_{10}}$ |
|-------|---|-----------------------------|-------|-----------------------------|-------|-----------------------------|---|
| | нульове | $\Delta_{\alpha}^{(0)}$, % | перше | $\Delta_{\alpha}^{(1)}$, % | друге | $\Delta_{\alpha}^{(2)}$, % | |
| 1,3 | 1,753 | 52,2 | 1,191 | 35,5 | 0,415 | 12,3 | 3,359 |
| 1,4 | 1,360 | 62,7 | 0,644 | 29,7 | 0,166 | 7,6 | 2,170 |
| 1,6 | 0,984 | 77,2 | 0,250 | 19,6 | 0,040 | 3,2 | 1,274 |
| 1,8 | 0,810 | 86,5 | 0,114 | 12,2 | 0,012 | 1,3 | 0,936 |
| 2,0 | 0,714 | 92,7 | 0,053 | 6,9 | 0,003 | 0,4 | 0,770 |

На рис. 4 для трансверсально ізотропної оболонки складної форми з постійною товщиною показано розподіл меридіональних і кільцевих напружень на внутрішній поверхні S_0 під дією зовнішнього нерівномірного тиску, що змінюється згідно із законом (30) в якому прийнято $\sigma_{11}|_{S_1} = -\tau_{11}(1 + \cos 2\theta)$. При цьому поверхні оболонки (варіант V) задані рівнянням

$$S_i \sim r = r_i + \varepsilon \omega_i \cos k\theta,$$

де $\omega_0 = \omega_1 = 1$; $k = 6$. Пружні і геометричні характеристики оболонки для розрахунків приймалися наступними: ($c_{ij} \cdot 10^{10}$ Па): $c_{11} = 5,97$; $c_{12} = 2,62$; $c_{13} = 2,17$; $c_{33} = 6,17$; $c_{44} = 1,64$; $r_0 \equiv 1$, $r_1 = 1,4$; $\varepsilon = 0,1$.

Закон зміни зовнішнього тиску відповідає максимальному навантаженню оболонки в полюсах ($\theta=0$) і нульовому на лінії екватора ($\theta=\pi/2$). В силу осевої симетрії для фрагмента оболонки (рис. 4) у точках внутрішньої поверхні з додатною (опуклість гофра) та від'ємною (вогнутість) кривизнами має місце концентрація напружень, величина яких (суцільна лінія) в порядок вища значень напружень в порожнинній

сфері (штрихова). Зміна напружень на поверхнях неканонічної оболонки має істотну нелінійну осцильовану форму порівняно із сферичною.

Висновок. У даній статті на основі методу збурення форми границі (другий варіант) і параметричного представлення рівнянь неканонічних поверхонь товстих оболонок, близьких до сферичних, приведено вирази

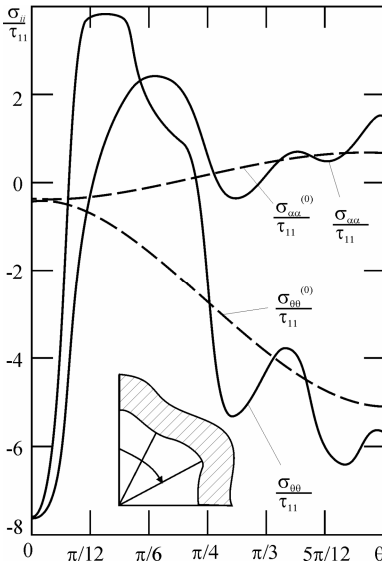


Рис. 4

диференціальних операторів для побудови у довільному наближенні граничних умов. З врахуванням перших трьох наближень розроблено загальний алгоритм розрахунку НДС ряду ізотропних і трансверсально ізотропних оболонок із складною геометричною формою поверхонь, що знаходяться під дією внутрішнього або зовнішнього тиску. Встановлено істотний вплив неканонічної форми оболонки на перерозподіл напружень порівняно з сферичною.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Бранков Г.И. Некоторые особенности при исследовании волнообразных оболочек.– В кн.: Механика сплошной среды и родственные проблемы анализа. М.: Наука, 1972. - С. 79–88.
2. Гузь А.Н., Немши Ю.Н. Метод возмущения формы границы в механике сплошных сред. – К.: Вища шк., 1989. – 352 с.
3. Немши Ю.Н., Немши В.Н. К решению пространственных задач теории упругости трансверсально изотропной среды для неканонических областей.– Прикл. механика. – 1976. – 12, № 12. – С. 76–82.
4. Чен В.Т. О некоторых задачах для упругих материалов со сферической изотропией.–Труды амер. о-ва инж.-механиков. Прикл. механика. – 1966. – 33, № 3. – С. 71–79.

REFERENCES

1. *Brankov H.I.*, Nekotori osobennosti pri issledovanii volnoobrasni obolochek (Some special features of the investigation of undulating shells, in: Continuum Mechanics and Related Problems of Analysis [in Russian]) // Nauka, Moscow, 1972. - p. 79–88.
2. *Guz' A.N. and Yu. N. Nemish.* Metod vosmuzhenia formy hranica v mekhanike sploshnoi sredy (Boundary-Shape Perturbation Method in Continuum Mechanics [in Russian]) // Vyscha Shkola, Kiev, 1989. – 352 p.
3. *Nemish Ju.N., Nemish V.N.* K resheniju prostranstvennix zadach teorii pruzhnosti transversalno-isotropnoy sredi dla nekanonshni oblasti (Contribution on the Solution of the Elasticity Theory of a Transversally Esotropic Medium for Noncanonical Regions). // Prikladna mekhanika. – 1976. – 12, N 12, p.76-82.
4. *Chen V.T.* O nekotorig zadachax dla upruhix materialov c sfericheskoi isotropiej (Certain problems for elastic materials with spherical isotropy) // Trans. ASME, Prikl. Mekh., 33, No 3, p. 71–79.

Nemish B.N., Chernopiskii D.I

STRESS STATE OF THICK-WALLED SPHERICAL-LIKE NONCANONICAL SHELLS OF REVOLUTION UNDER SURFACE FORCES

The problem on the stress-strain state (SSS) of thick-walled shells of revolution bounded by surfaces with the small amplitude of departure from spherical ones is solved with allowance for the first three approximations. With this in mind the general solution of equilibrium equations for a transversal-isotropic medium in a spherical coordinate system within the framework of the second variant of the boundary perturbation method (BPM) has been used. Based on the analytical solutions and numerical data obtained, the stress-strain state of the shells subject to constant or variable axisymmetric (internal and external) pressure is analyzed. The influence of the geometric parameters of equations for noncanonical surfaces with various shell shapes on the redistribution of stresses in comparison with a spherical shell (canonical shell and zero approximation) is demonstrated. Parametric representation of the equations of noncanonical surfaces and, respectively, differential operators in approximations made it possible to calculate within the framework of a single algorithm the stress-strain state of a number of shells with various configurations. The stress concentration numerical data at characteristic points (minimum thickness under maximum loading) of the shell are obtained. It is shown how variation in the curvature of the shell surface affects the magnitude and nonlinear character of stress distributions, which are consistent

with asymptotical properties of solutions under the oscillating law of variations in boundary conditions. Particularly, the shells with oscillated surfaces are associated with equilibrium equations (as the systems of partial differential equations) with Lamé's coefficients dependent on rapidly varying functions that appear in equations of boundary surfaces. The asymptotic solution properties of such systems of differential equations have been studied by M.I. Vyshik and L.A. Lyusternak.

Key words: thick-walled spherical-like noncanonical shells, constant and variable pressure.

Немиш В.Н., Чернопиский Д.И.

**НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ ТОЛСТЫХ НЕКАНОНИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК
ВРАЩЕНИЯ, БЛИЗКИХ К СФЕРИЧЕСКИМ, ПОД ДЕЙСТВИЕМ
ПОВЕРХНОСТНЫХ СИЛ**

В статье на основании метода возмущения формы границы (второй вариант) и параметрического представления уравнений неканонических поверхностей толстых оболочек, близких к сферическим, приведено выражения дифференциальных операторов для построения у произвольном приближении граничных условий. С учетом первых трех приближений разработан общий алгоритм расчета НДС ряда изотропных и трансверсально изотропных оболочек из сложной геометрической формой поверхностей, которые находятся под внутренним или внешним давлением. Установлено существенное влияние неканонической формы оболочки на перераспределение напряжений по сравнению со сферической.

Ключевые слова: толстые неканонические оболочки, близкие к сферическим, постоянное и переменное давление.

УДК 539.3

Немиш В.М., Чернопиский Д.Г. **Напружений стан товстих неканонічних оболонок, близьких до сферичних, під дією поверхневих сил** // Опір матеріалів і теорія споруд. – 2017. – Вип. 98. – С. 104-118.

Методом збурення форми границі з врахуванням перших трьох наближень отримано аналітичні розв'язки задачі для дослідження напружено-деформованого стану товстих неканонічних оболонок під дією внутрішнього і зовнішнього тиску.

Табл. 2. Іл. 4. Бібліогр. 4 назв.

Nemish V.N., Chernopiskii D.I. **Stress state of thick-walled spherical like noncanonical shells of revolution under surface forces** // Strength of Materials and Theory of Structures. – 2017. – Issue. 98. – С. 104-118.

The method of perturbing the shape of the boundary, taking into account the first three approximations, provides analytic solutions to the problem for studying the stress-deformed state of thick non-canonical shells under the influence of internal and external pressure.

Немиш В.Н., Чернопиский Д.И. **Напряженное состояние толстых неканонических оболочек вращения, близких к сферическим, под действием поверхностных сил** // Соппротивление материалов и теория сооружений. – 2017. – Вип. 98. – С. 104-118.

Методом возмущения формы границы с учетом первых трех приближений получены аналитические решения задачи для исследования напряженно-деформированного состояния толстых неканонических оболочек под действием внутреннего и внешнего давления.

Автор (науковий ступінь, вчене звання, посада): кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри економіко-математичних методів Тернопільського національного економічного університету НЕМІШ Васи́ля Миколайовича
E-mail: nemish_vm@ukr.net

Автор (науковий ступінь, вчене звання, посада): кандидат фізико-математичних наук, науковий співробітник Івано-Франківського національно-технічного університету нафти і газу ЧОРНОПІСЬКИЙ Дмитро Гнатович

Робочий тел.: +380 (44) 234-31-33.

E-mail: info@ndumka.kiev.ua