

УДК 534-21:537.226.86

ВАРІАЦІЙНО-СПЛАЙНОВИЙ МЕТОД В ЗАДАЧАХ ДОСЛІДЖЕННЯ ОСЕСИМЕТРИЧНИХ КОЛИВАНЬ П'ЄЗОКЕРАМІЧНИХ ТІЛ

О.І. Безверхий¹,
д-р фіз.-мат. наук,

Л.О. Григор'єва²,
канд. фіз.-мат. наук

¹Національний транспортний університет, Київ, Україна

²Київський національний університет будівництва і архітектури, Київ, Україна

На основі варіаційного принципу Гамільтона-Остроградського і сплайн апроксимацій по одній координаті рівняння гармонійних осесиметричних електропружних коливань в циліндричних координатах зведено до системи звичайних диференціальних рівнянь. Отримана крайова задача розв'язується методом дискретної ортогоналізації. Запропонована методика дозволяє ефективно досліджувати гармонійні коливання п'єзокерамічних тіл циліндричної форми при довільних граничних умовах. Визначено резонансні частоти радіально поляризованого порожнистого циліндра з п'єзокераміки PZT-4, досліджено його динамічний електромеханічний стан при моногармонічному електричному навантаженні.

Ключові слова: п'єзокерамічні циліндри, вимушені пружноелектричні коливання, електричне збурення, радіальна поляризація, принцип Гамільтона – Остроградського, сплайн-апроксимація.

Природні і синтезовані п'єзоелектричні матеріали завдяки їх здатності перетворення електричного поля в механічні деформації (зворотний п'єзоэффект) і механічних деформацій в електричне поле (прямий п'єзоэффект) знаходять широке застосування в пристроях радіоелектроніки і зв'язку, обчислювальної техніки, автоматики, вимірювальної техніки, приладах для контролю технологічних процесів, генераторах і приймачах механічних (акустичних) коливань в кіло- і мегагерцовому діапазоні. У зв'язку з цим актуальними є розробка і вдосконалення теоретичних і чисельних методів аналізу пружноелектричних гармонійних і нестационарних коливань на основі дискретних просторових континуальних рівнянь електропружності [5, 6, 8] і їх варіаційних тлумачень [3] з використанням чисельних апроксимацій по просторовій координаті, реалізація розроблених алгоритмів і проведення аналізу коливань напружено-деформованого стану і електричного поля типових п'єзокерамічних елементів. Для вирішення задач електропружності широко застосовуються різні методи сіткових апроксимацій, які або безпосередньо алгебраізують задачу, або зменшують її розмірність.

В статті [1] досліджуються вимушені електропружні коливання п'єзокерамічного циліндра на основі варіаційних принципів та сплайн-апроксимацій. В роботі [2] за допомогою процедури розділення змінних отримано набір крайових задач на власні значення для звичайних диференціальних рівнянь. В [9-11] на основі прямого чисельного інтегрування рівнянь руху досліджуються вимушені коливання п'єзоелектричних тіл різної геометрії.

Варіаційно-різницевий метод (ВРМ) побудови сіткових апроксимацій запропоновано в роботах [6, 7]. Він поєднує переваги енергетичних підходів до континуальної постановки задач електропружності з прямими чисельними методами розв'язання осесиметричних задач коливань п'єзоелектричних тіл.

Для підвищення точності розрахунків порівняно з ВРМ в даній роботі для дослідження усталених коливань п'єзокерамічних циліндрів пропонується виходячи з варіаційного принципу по одній координаті застосовувати сплайн-апроксимацію, а по іншій розв'язувати систему звичайних диференціальних рівнянь методом дискретної ортогоналізації.

1. Постановка задачі. Процеси електропружності описуються теорією механічного деформування при взаємодії з квазістатичним наближенням електричного поля [5, 6, 8]. Так як в даній роботі досліджуються усталені коливання, то будь-яку з функцій, що описують динамічний електромеханічний стан тіла, можна представити у вигляді

$$\Phi(r, \theta, z, t) = \operatorname{Re}(\Phi(r, \theta, z)e^{-i\omega t}),$$

де ω - кругова частота. Надалі множник $e^{-i\omega t}$ будемо опускати.

При розв'язанні осесиметричних задач електропружності скористаємось варіаційним принципом Гамільтона-Остроградського [3, 6]

$$\int_V \left(\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \rho \dot{u}_k \dot{u}_k \right) + \sigma_{ik} \dot{K}_{ik} - D_k \dot{E}_k - f_k \dot{u}_k \right) dV - \oint_S (\sigma_{ik} n_i \dot{u}_k + D_i n_i \dot{\phi}) dS = 0,$$

де $\sigma_{ik} \dot{K}_{ik} - D_i \dot{E}_i = \dot{H}_{el}$ - зміна електричної ентальпії [6], n - нормаль до поверхні S об'єму V , K - тензор деформацій, D - електрична індукція, E - електричне поле, ϕ - різниця потенціалів, f - об'ємна сила. У цьому принципі допустимі функції вибираються так, щоб виконувались визначальні співвідношення, співвідношення Коші, градієнтні співвідношення для електричного потенціалу, а також крайові умови, що задаються на переміщення і потенціал електричного поля.

Для дослідження осесиметричних аксіально-радіальних коливань циліндрів потрібно врахувати умови симетрії

$$u_\theta = 0; \quad \frac{\partial u_r}{\partial \theta} = \frac{\partial u_{zr}}{\partial \theta} = \frac{\partial \phi}{\partial \theta} = 0,$$

співвідношення Коші

$$S_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r}, \quad S_{\theta\theta} = \frac{u_r}{r}, \quad S_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z}, \quad 2S_{rz} = \frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r},$$

рівняння електростатики

$$E_r = -\frac{\partial \varphi}{\partial r}, \quad E_z = -\frac{\partial \varphi}{\partial z}.$$

Умова стаціонарності функціоналу при відсутності механічних навантажень набуде вигляду:

$$\delta A = \delta_{u_r, u_z, \varphi} \int_V [\sigma_{rr} S_{rr} + \sigma_{zz} S_{zz} + \sigma_{\theta\theta} S_{\theta\theta} + 2\sigma_{rz} S_{rz} - E_r D_r - E_z D_z - \rho \omega^2 (u_r^2 + u_z^2)] dV = 0. \quad (1)$$

В функціонал (1) входять тільки перші похідні від шуканих функцій, в силу чого його стаціонарне значення можна шукати на лінійно-шматкових функціях. При використанні таких функцій незалежними змінними функціоналу стають ординати вершин ламаної, які утворюють дискретний і скінченний набір шуканих параметрів. Суть такого методу, таким чином, полягає в знаходженні такого набору параметрів $u_i(r, z_i)$, $\varphi(r, z_i)$, $i = 1, 2, \dots, N-1$, при якому функціонал $A(u_r, u_z, \varphi)$ набуває стаціонарного значення.

Перевага цього методу над звичайним різницевим методом забезпечується більш низьким порядком похідних, які апроксимуються. При побудові рівнянь за допомогою цього методу вдається уникнути протиріч в кутових точках області. У порівнянні з варіаційними методами, в яких використовується одна для всього тіла система базисних функцій, такий метод має перевагу через відсутність проблеми вибору цих функцій. Крім того, перевагою такого методу в порівнянні з методами, в яких використовуються кускові базисні функції, наприклад в методі скінченних елементів, є простота побудови розв'язувальної системи для геометрично простих областей і крайових умов в переміщеннях, а також відсутність процесу асамблювання. Матриця розв'язувальної системи має симетричну стрічкову структуру. На відміну від інших методів, схема такого методу дозволяє досить просто представити систему рівнянь розв'язання для будь-яких крайових умов.

2. Метод розв'язання. Для отримання дискретних рівнянь розіб'ємо область по осі r $N-1$ прямими лініями, паралельними осі r , з інтервалом $h_i = z_{i+1} - z_i$ ($i = 0, 1, \dots, N-1$)

Представимо шукані функції на прямих у вигляді сплайна першого порядку [4], який є кусково-неперервною функцією

$$f(r, z) = f_i + (f_{i+1} - f_i)\xi_i = f_i(1 - \xi_i) + f_{i+1}\xi_i,$$

$$\xi_i = (z - z_i)/(z_{i+1} - z_i), \quad i = 0, 1, \dots, N-1.$$

Відповідні похідні

$$dz = h_i d\xi, \quad \frac{\partial f}{\partial r} = \frac{\partial f_i}{\partial r} (1 - \xi_i) + \frac{\partial f_{i+1}}{\partial r} \xi_i, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{h_i} (f_{i+1} - f_i).$$

Функціонал (1) перетворюється до вигляду

$$A = \int_{r_0}^{r_r} \int_0^L J dr dz = \int_{r_0}^{r_r} \sum_{i=0}^{N-1} \int_{z_i}^{z_{i+1}} J dr dz = \int_{r_0}^{r_r} \sum_{i=0}^{N-1} h_i \int_0^1 J_i d\xi dr = \int_{r_0}^{r_r} \sum_{i=0}^{N-1} F_i dr. \quad (2)$$

Тут J_i - дискретні функціонали на стрічках (z_i, z_{i+1}) , отримані при застосуванні запропонованої сплайн-апроксимації.

При дійсних переміщеннях і потенціалах функціонал досягає стаціонарного значення

$$\begin{aligned} \delta A &= \delta \int_{r_0}^{r_r} \int_0^L J dr dz = \int_{r_0}^{r_r} \delta \sum_{i=0}^{N-1} F_i(u_{ri}, u_{zi}, \Phi_i, u'_{ri}, u'_{zi}, \Phi'_i) dr = \\ &= \int_{r_0}^{r_r} \sum_{k=1}^3 \sum_{i=0}^{N-1} \left(\frac{\partial F_i}{\partial y_k} \delta y_k + \frac{\partial F_i}{\partial y'_k} \delta y'_k \right) dr = 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Тут $y_1 = u_{ri}$, $y_2 = u_{zi}$, $y_3 = \Phi_i$.

Якщо провести інтегрування по z і задовольнити умови стаціонарності функціоналу згідно до (3), отримаємо систему рівнянь для знаходження переміщень і електричного потенціалу

$$\begin{aligned} \frac{\partial J}{\partial u_{ri}} - \frac{\partial}{\partial r} \frac{\partial J}{\partial u'_{ri}} &= F_{ri}(u_{ri}, u_{zi}, \Phi_i) = 0, \\ \frac{\partial J}{\partial u_{zi}} - \frac{\partial}{\partial r} \frac{\partial J}{\partial u'_{zi}} &= F_{zi}(u_{ri}, u_{zi}, \Phi_i) = 0, \\ \frac{\partial J}{\partial \Phi_i} - \frac{\partial}{\partial r} \frac{\partial J}{\partial \Phi'_i} &= F_{\Phi_i}(u_{ri}, u_{zi}, \Phi_i) = 0. \end{aligned} \quad (4)$$

Систему звичайних диференціальних рівнянь другого порядку з відповідними крайовими умовами будемо розв'язувати чисельно за допомогою методу дискретної ортогоналізації.

На зовнішніх поверхнях циліндра задаються переміщення або напруження згідно матеріальних співвідношень для попередньо поляризованої кераміки. До електродованих поверхонь циліндра прикладається різниця потенціалів, яка при закороченні електродів дорівнює нулю. На неелектродованих поверхнях електрична індукція $D_n = 0$. Таким чином, в загальному випадку на зовнішніх поверхнях $z = 0$, $z = L$, $r = r_0$, $r = r_r$ циліндра маємо змішані граничні умови у

вигляді лінійних комбінацій переміщень, електричного потенціалу та їх похідних

$$\begin{aligned}
 U_{z0}(u_{r0}, u_{z0}, \Phi_0, u_{r1}, u_{z1}, \Phi_1, u'_{r0}, u'_{z0}, \Phi'_0) &= G_{z0}, \\
 U_{zL}(u_{rN}, u_{zN}, \Phi_N, u_{rN-1}, u_{zN-1}, \Phi_{N-1}, u'_{rN}, u'_{zN}, \Phi'_N) &= G_{zL}, \\
 U_{r0}(u_{rj}, u_{zj}, \Phi_j, u'_{ri}, u'_{zi}, \Phi'_i) \Big|_{r=r_0} &= G_{r0}, \quad j = i-1, i, i+1, \quad i = 1, \dots, N-1; \\
 U_{rr}(u_{rj}, u_{zj}, \Phi_j, u'_{ri}, u'_{zi}, \Phi'_i) \Big|_{r=r_r} &= G_{rr}, \quad j = i-1, i, i+1, \quad i = 1, \dots, N-1. \quad (5)
 \end{aligned}$$

3. Коливання п'єзокерамічного циліндра з радіальною поляризацією. Матеріальні співвідношення для попередньої поляризованої кераміки в радіальному напрямку з урахуванням осьової симетрії мають вигляд [6]

$$\begin{aligned}
 \sigma_{rr} &= c_{13}^E S_{\theta\theta} + c_{13}^E S_{zz} + c_{33}^E S_{rr} - e_{33} E_r, \\
 \sigma_{\theta\theta} &= c_{11}^E S_{\theta\theta} + c_{12}^E S_{zz} + c_{13}^E S_{rr} - e_{13} E_r, \\
 \sigma_{zz} &= c_{12}^E S_{\theta\theta} + c_{11}^E S_{zz} + c_{13}^E S_{rr} - e_{13} E_r, \quad \sigma_{rz} = 2c_{55}^E S_{rz} - e_{15} E_z, \\
 D_z &= 2e_{15} S_{rz} + \varepsilon_{11}^S E_z, \quad D_r = e_{13} (S_{zz} + S_{\theta\theta}) + e_{33} S_{rr} + \varepsilon_{33}^S E_r.
 \end{aligned}$$

Функціонал (1) при підстановці матеріальних залежностей та співвідношень Коші приймає вигляд

$$\begin{aligned}
 J = \int_{r_0}^{r_r} \int_0^L J r dr dz = \int_{r_0}^{r_r} \int_0^L \{ & [2c_{13}^E \frac{u_r}{r} \frac{\partial u_r}{\partial r} + c_{33}^E \left(\frac{\partial u_r}{\partial r} \right)^2 + 2e_{33} \frac{\partial \Phi}{\partial r} \frac{\partial u_r}{\partial r} + 2e_{13} \frac{\partial \Phi}{\partial r} \frac{u_r}{r} + \\
 & + c_{55}^E \left(\frac{\partial u_z}{\partial r} \right)^2 - \varepsilon_{33}^S \left(\frac{\partial \Phi}{\partial r} \right)^2] + [2c_{12}^E \frac{u_r}{r} \frac{\partial u_z}{\partial z} + c_{11}^E \left(\frac{\partial u_z}{\partial z} \right)^2 + c_{55}^E \left(\frac{\partial u_r}{\partial z} \right)^2 + \\
 & + 2e_{15} \frac{\partial \Phi}{\partial z} \frac{\partial u_r}{\partial z} - \varepsilon_{11}^S \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z} \right)^2] + 2c_{13}^E \frac{\partial u_z}{\partial z} \frac{\partial u_r}{\partial r} + 2e_{13} \frac{\partial \Phi}{\partial r} \frac{\partial u_z}{\partial z} + 2c_{55}^E \frac{\partial u_z}{\partial r} \frac{\partial u_r}{\partial z} + \\
 & + 2e_{15} \frac{\partial \Phi}{\partial z} \frac{\partial u_z}{\partial r} + [-\rho \omega^2 (u_r^2 + u_z^2) + c_{11}^E \left(\frac{u_r}{r} \right)^2] \} r dr dz. \quad (6)
 \end{aligned}$$

Тут r_0 і r_r - внутрішній і зовнішній радіуси відповідно, L - довжина циліндра.

Система вирішальних рівнянь (4) з врахуванням рівномірного розбиття ($h_i = h, i = 0, 1, \dots, N-1$) набуде вигляду

$$F_{ri}(u_{ri}, u_{zi}, \Phi_i) = rc_{33}^E D_1 + re_{33} D_3 + c_{33}^E A_1 + (e_{33} - e_{13}) A_3 + \frac{r}{2h} (c_{55}^E + c_{13}) A_5 +$$

$$\begin{aligned}
& + \left(\rho \omega^2 r - \frac{c_{11}^E}{r} \right) B_1 + \frac{1}{2h} (c_{13}^E - c_{12}^E) B_5 + \frac{r c_{55}^E}{h^2} B_7 + \frac{r e_{15}}{h^2} B_9 = 0, \\
& F_{zi}(u_{ri}, u_{zi}, \varphi_i) = r c_{55}^E D_2 + c_{55}^E A_2 + \frac{r}{2h} (c_{13}^E + c_{55}^E) A_4 + \\
& + \frac{r}{2h} (e_{13} + e_{15}) A_6 + \rho \omega^2 r B_2 + \frac{1}{2h} (c_{12} + c_{55}^E) B_4 + \frac{r c_{11}^E}{h^2} B_8 + \frac{e_{15}}{2h} B_6 = 0, \\
& F_{\varphi i}(u_{ri}, u_{zi}, \varphi_i) = e_{33} r D_1 - \varepsilon_{33}^S r D_3 + (e_{33} + e_{13}) A_1 - \varepsilon_{33}^S A_3 + \frac{r}{2h} (e_{13} + e_{15}) A_5 + \\
& + \frac{e_{13}}{2h} B_5 - \frac{r}{h^2} \varepsilon_{11}^S B_9 + \frac{r e_{15}}{h^2} B_7 = 0, \quad i = 1, 2, \dots, N-1. \quad (7)
\end{aligned}$$

Тут введено такі позначення:

$$\begin{aligned}
D_1 &= \left(\frac{1}{6} \frac{d^2 u_{ri+1}}{dr^2} + \frac{2}{3} \frac{d^2 u_{ri}}{dr^2} + \frac{1}{6} \frac{d^2 u_{ri-1}}{dr^2} \right), \quad D_2 = \left(\frac{1}{6} \frac{d^2 u_{zi+1}}{dr^2} + \frac{2}{3} \frac{d^2 u_{zi}}{dr^2} + \frac{1}{6} \frac{d^2 u_{zi-1}}{dr^2} \right), \\
D_3 &= \left(\frac{1}{6} \frac{d^2 \varphi_{i+1}}{dr^2} + \frac{2}{3} \frac{d^2 \varphi_i}{dr^2} + \frac{1}{6} \frac{d^2 \varphi_{i-1}}{dr^2} \right), \\
A_1 &= \left(\frac{1}{6} \frac{du_{ri+1}}{dr} + \frac{2}{3} \frac{du_{ri}}{dr} + \frac{1}{6} \frac{du_{ri-1}}{dr} \right), \quad A_2 = \left(\frac{1}{6} \frac{du_{zi+1}}{dr} + \frac{2}{3} \frac{du_{zi}}{dr} + \frac{1}{6} \frac{du_{zi-1}}{dr} \right), \\
A_3 &= \left(\frac{1}{6} \frac{d\varphi_{i+1}}{dr} + \frac{2}{3} \frac{d\varphi_i}{dr} + \frac{1}{6} \frac{d\varphi_{i-1}}{dr} \right), \quad A_4 = \left(\frac{du_{ri+1}}{dr} - \frac{du_{ri-1}}{dr} \right), \\
A_5 &= \left(\frac{du_{zi+1}}{dr} - \frac{du_{zi-1}}{dr} \right), \quad A_6 = \left(\frac{d\varphi_{i+1}}{dr} - \frac{d\varphi_{i-1}}{dr} \right), \\
B_1 &= \left(\frac{1}{6} u_{ri+1} + \frac{2}{3} u_{ri} + \frac{1}{6} u_{ri-1} \right), \quad B_4 = (u_{ri+1} - u_{ri-1}), \quad B_7 = (u_{ri+1} - 2u_{ri} + u_{ri-1}), \\
B_2 &= \left(\frac{1}{6} u_{zi+1} + \frac{2}{3} u_{zi} + \frac{1}{6} u_{zi-1} \right), \quad B_5 = (u_{zi+1} - u_{zi-1}), \quad B_8 = (u_{zi+1} - 2u_{zi} + u_{zi-1}), \\
B_3 &= \left(\frac{1}{6} \varphi_{i+1} + \frac{2}{3} \varphi_i + \frac{1}{6} \varphi_{i-1} \right), \quad B_6 = (\varphi_{i+1} - \varphi_{i-1}), \quad B_9 = (\varphi_{i+1} - 2\varphi_i + \varphi_{i-1}).
\end{aligned}$$

Введемо безрозмірніювання

$$\begin{aligned}
\bar{r} &= \frac{r}{R}, \quad \bar{u}_i = \frac{u_i}{R}, \quad \bar{\varphi} = \varphi \sqrt{\frac{\varepsilon_{33}}{c_{33} R^2}}, \quad \bar{e}_{ij} = \frac{e_{ij}}{\sqrt{c_{33} \varepsilon_{33}}}, \quad \bar{\rho} = 1, \\
\bar{c}_{ij} &= \frac{c_{ij}^E}{c_{33}^E}, \quad \bar{\varepsilon}_{ii} = \frac{\varepsilon_{ii}^S}{\varepsilon_{33}^S}, \quad \bar{\omega} = \omega R \sqrt{\frac{\rho}{c_{33}^E}}. \quad (8)
\end{aligned}$$

При цьому вигляд рівнянь не зміниться. Надалі знаки безрозмірності будемо опускати.

4. Чисельний метод розв'язання. Будемо шукати розв'язок у вигляді ($n = N - 1$)

$$\mathbf{Y} = \{u_{r1}, \dots, u_{rn}, u_{z1}, \dots, u_{zn}, \Phi_1, \dots, \Phi_n, u'_{r1}, \dots, u'_{rn}, u'_{z1}, \dots, u'_{zn}, \Phi'_1, \dots, \Phi'_n\} = \\ = \{y_1, \dots, y_n, y_{n+1}, \dots, y_{2n}, y_{2n+1}, \dots, y_{3n}, y_{3n+1}, \dots, y_{4n}, y_{4n+1}, \dots, y_{5n}, y_{5n+1}, \dots, y_{6n}\}.$$

Тоді систему рівнянь (7) можна представити в вигляді

$$\frac{d\mathbf{Y}}{dr} = \begin{cases} \frac{dy_i}{dr} = y_{3n+i}, \\ \frac{dy_{3n+i}}{dr} = \mathbf{M}^{-1}(-\mathbf{A} \frac{\partial \mathbf{Y}}{\partial r} - \mathbf{B}\mathbf{Y}), i = 1, \dots, 3n. \end{cases} \quad (9)$$

Тут \mathbf{B} - матриця коефіцієнтів системи (7) при переміщеннях та електричному потенціалі, \mathbf{A} - при їх перших похідних, \mathbf{M} - при других похідних. Матриці мають стрічкову форму, що спрощує знаходження чисельного розв'язку.

Розглянемо циліндр з закороченими мембранно закріпленими торцями [2]

$$u_r(r, 0) = \sigma_{zz}(r, 0) = 0, \quad u_r(r, l) = \sigma_{zz}(r, l) = 0, \quad \varphi(r, 0) = \varphi(r, l) = 0.$$

Нехай циліндричні поверхні вільні від механічних навантажень

$$\sigma_{rr}(r_0, z) = \sigma_{rz}(r_0, z) = 0, \quad \sigma_{rr}(r_r, z) = \sigma_{rz}(r_r, z) = 0.$$

До електродів на циліндричних поверхнях прикладена різниця потенціалів, яка змінюється за гармонічним законом з частотою ω і амплітудою $2V_0$:

$$\varphi(r_0, z, t) = -V_0 \sin \omega t, \quad \varphi(r_r, z, t) = V_0 \sin \omega t.$$

При переході до вектору змінних \mathbf{Y} граничні умови на циліндричних поверхнях перетворюються до вигляду ($i = 1, \dots, n$)

$$\frac{c_{13}^E}{r_0} y_i(r_0) + c_{13}^E \frac{y_{n+i+1}(r_0) - y_{n+i-1}(r_0)}{2h} + c_{33}^E y_{3n+i}(r_0) + e_{33} y_{5n+i}(r_0) = 0,$$

$$c_{44}^E \left(y_{4n+i}(r_0) + \frac{y_{i+1}(r_0) - y_{i-1}(r_0)}{2h} \right) + e_{42} \frac{y_{2n+i+1}(r_0) - y_{2n+i-1}(r_0)}{2h} = 0,$$

$$y_{2n+i}(r_0) = -1;$$

$$\frac{c_{13}^E}{r_r} y_i(r_r) + c_{13}^E \frac{y_{n+i+1}(r_r) - y_{n+i-1}(r_r)}{2h} + c_{33}^E y_{3n+i}(r_r) + e_{33} y_{5n+i}(r_r) = 0;$$

$$c_{44}^E \left(y_{4n+i}(r_r) + \frac{y_{i+1}(r_r) - y_{i-1}(r_r)}{2h} \right) + e_{42} \frac{y_{2n+i+1}(r_r) - y_{2n+i}(r_r)}{h} = 0;$$

$$y_{2n+i}(r_r) = 1. \quad (10)$$

Отримана система рівнянь розв'язується за допомогою методу колокацій або методу дискретної ортогоналізації. На сітці 50×30 результати відрізняються не більше ніж на 2%. При подальшому збільшенні точок розбиття похибка зменшується, але помітно збільшується час розрахунку, що істотно в задачах на визначення власних частот перетворювача.

5. Аналіз отриманих результатів. Проаналізуємо коливання радіально поляризованого порожнистого циліндра з кераміки PZT-4 [6]. Для тестування розробленого підходу розглянемо циліндр із наступними розмірами: $r_r = 6 \text{ см}$, $r_0 = 4 \text{ см}$, $L = 20 \text{ см}$. Торці мембранно закріплені і закорочені, вільні від механічних навантажень електродовані циліндричні поверхні навантажені різницею потенціалів. Аналогічна задача розглядалася в роботі [2], де запропоновано розв'язання задачі про вимушені коливання циліндра на основі розкладання в степеневі ряди. Отримані результати візуально відповідають результатам, представленим в роботі [2], з точністю до обезрозмірення. Наприклад, в [2] маємо власні частоти

$\Omega \approx (0,44; 0,76; 0,8)$ при обезрозміренні $\bar{\omega} = \omega h \sqrt{\frac{\rho}{\lambda}} =$

$= \omega \cdot 10^{-2} \sqrt{\frac{7500}{10^{10}}} = 8,66 \cdot 10^{-6} \omega$, тобто розмірні власні частоти для циліндра

$\omega_1 = 50,8 \text{ кГц}$, $\omega_2 = 87,7 \text{ кГц}$, $\omega_3 = 92,4 \text{ кГц}$.

З рис. 1 маємо $\Omega \approx (0,66; 1,14; 1,18; 1,66; 2,22)$ при обезрозмірюванні

$\bar{\omega} = \omega R \sqrt{\frac{\rho}{c_{33}^E}} = \omega \cdot 5 \cdot 10^{-2} \sqrt{\frac{7500}{11,5 \cdot 10^{10}}} = 12,77 \cdot 10^{-6} \omega$.

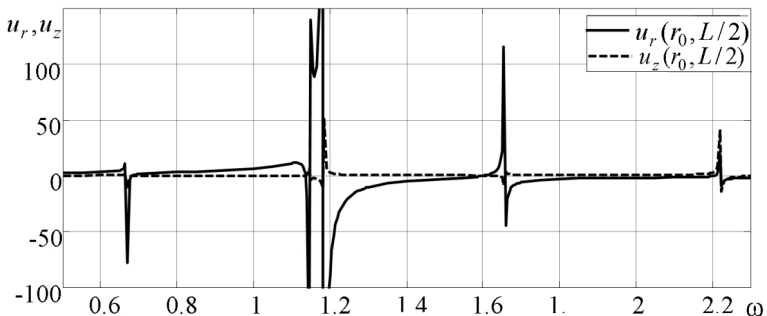


Рис. 1

Розмірні власні частоти $\omega_1 = 51,7кГц$, $\omega_2 = 89,3кГц$, $\omega_3 = 92,4кГц$, $\omega_4 = 13кГц$, $\omega_5 = 174кГц$. Маємо відхилення на першій і другій частотах в межах 2%, третя частота збіглася більш точно.

На рис. 2 наведені криві розподілу амплітудних значень радіальних і поздовжніх переміщень на циліндричних поверхнях циліндра при частоті

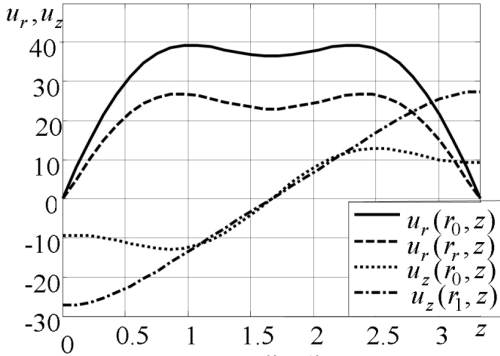


Рис. 2

Рис. 3 ілюструє розподіл напружень в перетинах циліндра. Максимальними є окружні напруження на внутрішній поверхні циліндра.

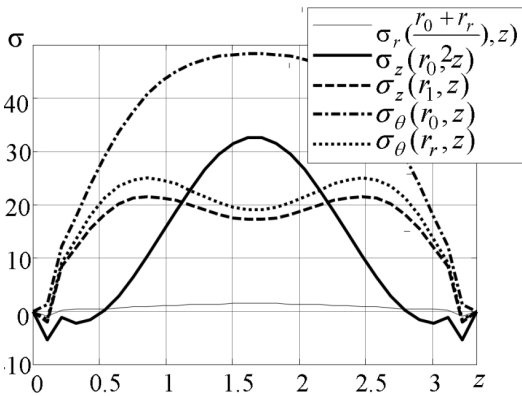


Рис. 3

прямку - $D_{z \max} = D_z(r_0, 0) = -D_z(r_0, L) = 16$.

Висновок. Запропонована методика має ряд переваг над пошуком розв'язків розглядуваних задач шляхом розділення змінних [2] та ВРМ [6],

$\bar{\omega} = 1,1$ поблизу другої власної частоти. Представлені результати отримані методом дискретної ортогоналізації на сітці 50×30 точок. При обчисленнях взято $\bar{V}_0 = 1$, тобто при переході до розмірної задачі отримані результати перетворюються згідно (8) і множаться на коефіцієнт $\frac{V_0}{R} \sqrt{\frac{\epsilon_{33}}{c_{33}}}$.

Максимальні радіальні напруження в циліндрі

$$\sigma_{r \max} = \sigma_r \left(\frac{r_0 + r_1}{2}, \frac{L}{2} \right) = 1,1,$$

що набагато менші за амплітудні значення поздовжніх і окружних напружень. Максимальні значення електричної індукції в радіальному напрямку становлять

$$D_{r \max} = D_r \left(r_0, \frac{L}{2} \right) = 38, \text{ в}$$

поздовжньому нап-

так як вона передбачає отримання системи звичайних диференціальних рівнянь (9), яка є зручною для розв'язання і не потребує вирішення алгебраїчних систем великого порядку, як у ВРМ, або сумування великої кількості членів ряду. Розвинутий підхід завдяки застосуванню принципу Гамільтона-Остроградського дозволяє ефективно досліджувати усталені коливання п'єзокерамічних циліндричних тіл при довільних граничних умовах та електричних або механічних навантаженнях. Дослідження збіжності і точності методу для тіл іншої геометрії або при інших граничних умовах зручно робити варіацією кількості точок розбиття і шляхом зміни напрямку сплайн-апроксимацій. При дослідженні коливань конкретних електромеханічних перетворювачів запропонована методика дає змогу визначати резонансні частоти, форми коливань, електромеханічний стан тіла при моногармонічних навантаженнях.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Безверхий О.І., Григор'єва Л.О.* Метод дослідження осесиметричних коливань п'єзокерамічних тіл // Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій. – 2015. – Вип. 24. – С. 5-17.
2. *Болкисев А.М., Шульга Н.А.* Вынужденные колебания пьезокерамического полого цилиндра (радиальная поляризация) // Прикл. механика. - 1985. - 21, № 5. - С. 118-121.
3. *Вашизу К.* Вариационные методы в теории упругости и пластичности. - М.: Мир, 1987. - 542 с.
4. *Завьялов Ю.С., Квасов Б.И., Мирошниченко В.Л.* Методы сплайн-функций. - М: Наука, 1980. - 350 с.
5. Механика связанных полей в элементах конструкций в 5-ти томах / Под общ. ред. А.Н. Гузя. Т. 5. Электроупругость / *Гринченко В.Т., Улитко А.Ф., Шульга Н.А.* - М.: Мысль, 1989. - 280 с.
6. *Шульга Н.А., Болкисев А.М.* Колебания пьезокерамических тел. - К.: Наукова думка, 1990. - 228 с.
7. *Шульга Н.А., Борисенко Л.В.* Колебания пьезокерамического цилиндра с осевой поляризацией при электрических нагружениях // Прикл. механика. - 1989. - 25, № 10. - С. 41-47.
8. *Шульга Н.А., Карлаш В.Л.* Резонансні електромеханічні коливання п'єзоелектричних пластин. - К.: Наукова думка, 2007. - 272с.
9. *Shul'ga N.A., Grigor'eva L.O.* Comparative Analysis of the Electroelastic Thickness Vibrations of Layers with Curved Boundaries / *Int. Appl. Mech.* - 2011. - 47, N 2. - Pp. 177-185.
10. *Shul'ga M.O., Grigoryeva L.O.* Electromechanical unstationary thickness vibrations of piezoceramic transformers at electric excitation // *Mechanical Vibrations: Types, Testing and Analysis.* – Nova Science Publishers, New York. – 2011. – P.179-204.
11. *Shul'ga N.A., Grigor'eva L.O., Kirichenko A.A.* Nonstationary Electroelastic Vibrations of a Spherical Shell with Impedance Boundary Condition // *Int. Appl. Mech.* - 2014. - 50, N 3. - Pp. 274-281.

REFERENCES

1. *Bezverkhyy O.I., Grigorieva L.O.* Metod doslidzhennya osesimetrichnih kolivan p'zokeramichnih til // (Research method of axially symmetric oscillations of piezoceramic bodies) // *Problemi obchisluyvalnoy mehaniki i mitsnosti konstruksiy (Problems of computational mechanics and strength of structures)*, 2015. - Vol. 24. - P. 5-17.
2. *Bolkisev, A.M., Shul'ga, N.A.* Vynuzhdennye kolebaniya p'ezokeramicheskogo pologo cilindra (radial'naya polyarizatsiya) (Forced Vibrations of Piezoceramic Hollow Cylinders (radial polarization)) // *Prichladnaya mehanika*, 1985. - 21, № 5. - С. 118-121. –rus.
3. *Washizu, K.* Variational methods in elasticity and plasticity. Pergamon Press, 1982
4. *Zavyalov Yu.S., Kvasov B.I., Miroshnichenko V.L.* Metody splajn-funkcij (Methods of spline functions). - М: Science, 1980. - 350 p. –rus.

5. *Mexanika svyazannyx polej v elementax konstrukcij (Mechanics of related fields in structural elements) in 5 volumes / edited by A.N. Guz. V. 5. Elektrouprugost' (Electroelasticity) / Grinchenko, V.T., Ulitko, A.F., Shul'ga, N.A. - Naukova Dumka, Kyiv, 1989. – 280 p.-rus.*
6. *Shul'ga N.A., Bolkisev A.M. Kolebaniya p'ezokeramicheskix tel (Vibrations of piezoceramic bodies). - Naukova Dumka, 1990. - 228 p.-rus.*
7. *Shul'ga, N.A., Borisenko, L.V. Vibrations of an Axially Polarized Cylinder during Electrical Loading // Int. Appl. Mech, 1989. – 25, N 10. – P. 1070–1075.*
8. *Shul'ga M.O., Karlash V.L. Rezonansni elektromexanichni kolivannya p'jezelektrichnix plastin (Resonant electromechanical vibrations of piezoelectric plates). - Naukova Dumka, Kyiv, 2008.-ukr.*
9. *Shul'ga N.A., Grigor'eva L.O. Comparative Analysis of the Electroelastic Thickness Vibrations of Layers with Curved Boundaries // Int. Appl. Mech., 2011. - 47, N 2. - P. 177-185.*
10. *Shulga M.O., Grigoryeva L.O. Electromechanical unstationary thickness vibrations of piezoceramic transformers at electric excitation // Mechanical Vibrations: Types, Testing and Analysis. – Nova Science Publishers, New York. – 2011. – P.179 – 204.*
11. *Shul'ga N.A., Grigor'eva L.O., Kirichenko A.A. Nonstationary Electroelastic Vibrations of a Spherical Shell with Impedance Boundary Condition // Int. Appl. Mech., 2014. - 50, N 3. - Pp. 274-281.*

Bezverkhyy O.I., Grigoryeva L.O.

VARIATIONAL-SPLINE METHOD IN RESEARCH PROBLEMS OF AXIALLY SYMMETRIC PIEZOCERAMIC BODIES VIBRATIONS

In the paper there are considered hollow piezoceramic radially polarized cylinders what are widely used as sound projectors and receivers. The most characteristic run modes of piezoceramic transmitters are resonant modes. An approach to solving of piezoceramic cylinders harmonic oscillations problems on the basis of variational methods is proposed. Two-dimensional harmonic oscillations of polarized by thickness piezoceramic cylinders under electrical loads are studied. Using principle of Hamilton – Ostrogradskii and spline approximations by longitudinal coordinate the system of electroelasticity equations in cylindrical coordinates is reduced to a system of ordinary differential equations by radial coordinate. The suggested approach enables to research the oscillation of transmitters under electrical and mechanical loads at arbitrary boundary conditions. The resulting boundary value problem is integrated by discrete orthogonalization method. The proposed method has a number of advantages over decomposition of solution in series and variational, difference and variationally difference methods, since it involves obtaining a system of ordinary differential equations that is convenient for solving and does not require solving of great order algebraic systems, as in the difference or variationally difference methods, or the summing up of a large number of row members. The developed methodology is used for investigating of harmonic oscillation of cylinders with covered by membrane sides under electric potential loading, founding their resonant frequencies and modes investigation. Obtained results are tested by comparing with results found in the literature and obtained by other methods. The amplitude of movements of the outer surface depending on the loading frequency for the certain body is established. Resonance frequencies correspond to instant changing (great values) of physical characteristics. For investigating of forced vibration electromechanical state of transmitters near the first resonance we built forms of main strain-stress state characteristics at certain frequency. It is established that the maximum radial stresses in the cylinder are much smaller than the amplitude values of longitudinal and circumferential stresses.

Key words: electroelastic vibrations, variational principle, spline approximation, piezoceramic cylinder, resonance frequencies, forced vibrations, electric excitation.

Безверхий А.И., Григорьева Л.О.

ВАРИАЦИОННО-СПЛАЙНОВЫЙ МЕТОД В ЗАДАЧАХ ИССЛЕДОВАНИЯ ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ КОЛЕБАНИЙ ПЬЕЗОКЕРАМИЧЕСКИХ ТЕЛ

На основе вариационного принципа Гамильтона-Остроградского и сплайн аппроксимаций по одной координате уравнения гармонических осесимметричных электроупругих колебаний в цилиндрических координатах сведены к системе обыкновенных дифференциальных уравнений. Полученная краевая задача решается методом дискретной ортогонализации. Предложенная

методика позволяет эффективно исследовать гармонические колебания пьезокерамических тел цилиндрической формы при произвольных граничных условиях. Определены резонансные частоты радиально поляризованного полого цилиндра из пьезокерамики PZT-4, исследовано его динамическое электромеханическое состояние при моногармоническом электрическом нагружении.

Ключевые слова: пьезокерамические цилиндры, вынужденные упругоэлектрические колебания, электрическое нагружение, радиальная поляризация, принцип Гамильтона-Остроградского, сплайн-аппроксимация.

УДК 534-21:537.226.86

Безверхий О.І., Григор'єва Л.О. Вариційно-сплайновий метод в задачах дослідження осесиметричних коливань п'єзокерамічних тіл / Опір матеріалів і теорія споруд: наук.-техн. збірн. – К.:КНУБА, 2017. – Вип. 98. – С. 138-149.

Розвинуто чисельний підхід до дослідження гармонічних осесиметричних електропружних коливань електромеханічних перетворювачів циліндричної форми на основі варіційного принципу Гамільтона-Остроградського і сплайн-апроксимацій по одній координаті.

Табл. 0. Іл. 3. Бібліогр. 11 назв.

Bezverkhyy O.I., Grigoryeva L.O. Variational-Spline Method in Research Problems of Axially Symmetric Piezoceramic Bodies Vibrations / Strength of Materials and Theory of Structures: Scientific and technical collected articles. - Kyiv: KNUBA, 2017. - Issue 98. - P. 138-149. - Ukr.

For the study of harmonic axisymmetric electric-elastic oscillations of electromechanical converters of cylindrical shape a numerical approach on the basis of the Hamilton-Ostrogradsky variational principle and spline approximations in one coordinate is developed.

Табл. 0. Fig. 3. Bibliograph. 11 ref.

Безверхий А.И., Григорьева Л.О. Вариационно-сплайновый метод в задачах исследования осесимметричных колебаний пьезокерамических тел / Сопротивление материалов и теория сооружений: науч.-техн. сборн. - К.: КНУСА, 2017. - Вып. 98. - С. 138-149.

Развит численный подход к исследованию гармонических осесимметрических электроупругих колебаний электромеханических преобразователей цилиндрической формы на основе вариационного принципа Гамильтона-Остроградского и сплайн-аппроксимаций по одной координате.

Табл. 0 Ил. 3. Библиогр. 11 назв.

Автор (науковий ступінь, вчене звання, посада): доктор фіз.-мат.наук, професор, Національний транспортний університет, БЕЗВЕРХИЙ Олександр Ігорович
Адреса робоча: 02000, Україна, м. Київ, в. Суворова, 1, Національний транспортний університет, БЕЗВЕРХОМУ Олександру Ігоровичу

Мобільний тел.: +38 (067)-684-91-31

E-mail: O_bezver@ukr.net

Автор (науковий ступінь, вчене звання, посада): канд.фіз.-мат.наук, доцент, Інститут механіки ім. С.П.Тимошенка НАН України, ГРИГОР'ЄВА Людмила Олександрівна
Адреса робоча: 03057, Україна, м. Київ, в. П. Нестерова, 3, Інститут механіки ім. С.П.Тимошенка НАН України, ГРИГОР'ЄВІЙ Людмилі Олександрівні

Мобільний тел.: +38 (097)-304-34-32

E-mail: l_grigoryeva@ukr.net

orcid.org/0000-0001-7013-0327