УДК 539.3

СТОХАСТИЧНА СТІЙКІСТЬ ПАРАМЕТРИЧНИХ КОЛИВАНЬ ГІПЕРБОЛІЧНОГО ПАРАБОЛОЇДА

Ю.В. Ворона[1],
канд. техн. наук,

О.О. Лук'янченко [1],
канд. техн. наук;

О.В. Костіна[1],
канд. техн. наук.

[1]*Київский національний університет будівництва і архітектури*
Повітрофлотський просп., 31, м. Київ. 03680

Досліджена стохастична стійкість параметричних коливань гіперболічного параболоїда при дії дельта-корельованого стохастичного навантаження у середньому на основі моментних функцій фазових координат другого порядку. Система диференціальних рівнянь першого марківського наближення для других моментів зі сталими коефіцієнтами отримана за допомогою функціонального підходу, методу скінченних елементів та асимптотичного методу, що базується на розкладанні статистичних характеристик розв'язків динамічної задачі за малим параметром. Виконано якісний аналіз режимів стохастичних параметричних коливань гіперболоїда при дії поверхневого тиску за допомогою прямого методу чисельного інтегрування Рунге-Кутти четвертого порядку та характеристичних показників Хілла. Визначені області динамічної нестійкості гіперболічного параболоїда та критичні значення стохастичного навантаження.

Ключові слова: нелінійна стійкість, стохастична стійкість, параметричні коливання, функціональний підхід, гіперболічний параболоїд.

Вступ. Значний вклад в загальну теорію динамічної стійкості пружних систем, в тому числі в дослідження параметричних коливань детерміністичних систем, зробили М.М. Бєляєв, М.М. Крилов і М.М. Боголюбов, В.В. Болотін [1,2]. В працях Р.Л. Стратоновича, Р.З. Хасмінського, М.Ф. Діментберга, В.І. Кляцкина, А.С. Вольміра та інших [3-15]. Значне місце серед динамічних задач на теперішній час займають задачі стохастичної стійкості параметричних коливань пологих оболонок [16-19]. Кількість робіт, яка присвячена дослідженню статичної і динамічної поведінки пологих оболонок від'ємної гаусової кривизни небагато [20-23]. В статті [24] автори навели чисельну методику побудови редукованої моделі стійкості параметричних коливань гіперболічного параболоїда. Для формування редукованих матриць мас, демпфірування, жорсткості та геометричної жорсткості застосовані процедури програмного комплексу скінченно-елементного аналізу. В результаті аналізу впливу постійної складової параметричного навантаження на власні частоти коливань виявлена втрата стійкості гіперболоїда в деякому діапазоні навантаження з подальшим виходом в зону стійкості. Ця особливість врахована в даній статті при дослідженні стохастичної стійкості параметричних коливань гіперболічного параболоїда при дії дельта-корельованого стохастичного навантаження у середньому на основі моментних функцій фазових координат другого порядку.

1. Математична модель стохастичної стійкості гіперболічного параболоїда при дії параметричного навантаження. В статті досліджена стійкість гіперболічного параболоїда, фізичні та геометричні параметри якого прийняті рівними: сторона $a = b = 0{,}2\ м$, товщина $h = 0{,}5\ мм$, модуль пружності $E = 98{,}1\ ГПа$, коефіцієнт Пуасона $\mu = 0{,}25$, прогин $f = 0{,}06\ м$. Поверхня гіперболоїда моделювалась у вигляді сукупності чотирьохкутних плоских скінченних елементів зі шістьма степенями вільності у вузлах за допомогою комплексу NASTRAN [25]. Вузли контуру оболонки жорстко закріплені. Стохастичне параметричне навантаження подавалось у вигляді поверхневого тиску $z(t) = z_0 + \tilde{z}(t)$, де z_0 – стала складова навантаження; $\tilde{z}(t)$ – випадкова дельта-корельована складова навантаження з кореляційною функцією

$$K(\tau) = \sigma_0^2 e^{-\alpha\tau}\left(cos\,\theta_\alpha\tau + \frac{\alpha}{\theta_\alpha} sin\,\theta_\alpha\tau\right) \tag{1}$$

і скінченним часом кореляції

$$\tau_0 = \frac{1}{\sigma_0^2}\int K(\tau)d\tau = \frac{1}{\sigma_0^2}\int \sigma_0^2 e^{-\alpha\tau}\left(cos\,\theta_\alpha\tau + \frac{\alpha}{\theta_\alpha} sin\,\theta_\alpha\tau\right)d\tau =$$

$$= \int e^{-\alpha\tau} cos\,\theta_\alpha\tau d\tau + \int e^{-\alpha\tau}\frac{\alpha}{\theta_\alpha} sin\,\theta_\alpha\tau d\tau =$$

$$= \left.\frac{e^{-\alpha\tau}\left(-\alpha\, cos\theta_\alpha\tau + \theta_\alpha\, sin\theta_\alpha\tau\right)}{(-\alpha)^2 + \theta_\alpha^2}\right|_0^\infty + \frac{\alpha}{\theta_\alpha}\left.\left(\frac{e^{-\alpha\tau}\left(-\alpha\, sin\theta_\alpha\tau - \theta_\alpha\, cos\theta_\alpha\tau\right)}{(-\alpha)^2 + \theta_\alpha^2}\right)\right|_0^\infty =$$

$$= \frac{\alpha}{\alpha^2 + \theta_\alpha^2} + \frac{\alpha}{\theta_\alpha}\left(\frac{\alpha}{\alpha^2 + \theta_\alpha^2}\right) = \frac{2\alpha}{\alpha^2 + \theta_\alpha^2}, \tag{2}$$

де σ_0^2 – інтенсивність стохастичного впливу; α – параметр кореляції, θ_α – частота схованої періодичності.

Система диференціальних рівнянь, яка описує стохастичну стійкість параметричних коливань пологої оболонки, зформована і представлена авторами в статті [18]. Вона отримана за допомогою функціонального підходу, методу скінченних елементів та асимптотичного методу, що базується на розкладанні статистичних характеристик розв'язків динамічної задачі за малим параметром і має вид матричних рівнянь першого марківського наближення для моментних функцій фазових координат другого порядку

$$\frac{d}{dt}\langle\vec{\zeta}(t)\vec{\zeta}^{T}(t)\rangle=\left(A+DB^{2}\right)\langle\vec{\zeta}(t)\vec{\zeta}^{T}(t)\rangle+$$
$$+\langle\vec{\zeta}(t)\vec{\zeta}^{T}(t)\rangle\left(A+DB^{2}\right)^{T}+2\sqrt{D}B\langle\vec{\zeta}(t)\vec{\zeta}^{T}(t)\rangle B^{T} \qquad (3)$$

з початковими умовами $\langle\vec{\zeta}(0)\vec{\zeta}^{T}(0)\rangle=\left(\vec{\zeta}_{0}\vec{\zeta}_{0}^{T}\right)$.

В системі (3) усереднені за ансамблем реалізацій моментні функціїї другого порядку фазових координат

$$\vec{\zeta}(t)=\left(\zeta_{1}(t),\zeta_{2}(t),\ldots,\zeta_{2m}(t)\right)^{T}=\left(y_{1}(t),y_{2}(t),\ldots,y_{m}(t),\dot{y}_{1}(t),\dot{y}_{2}(t),\ldots,\dot{y}_{m}(t)\right)^{T},$$

де $\bar{y}(t)$ – m - вимірний вектор вузлових переміщень; $D=\sigma_{0}^{2}$ – дисперсія стохастичного впливу; матриці A і B обчислюваться за формулами

$$A=\begin{bmatrix}0 & E\\ -\left(M^{*}\right)^{-1}K^{*} & -\left(M^{*}\right)^{-1}C^{*}\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}0 & 0\\ -\left(M^{*}\right)^{-1}K_{G}^{*} & 0\end{bmatrix}. \qquad (4)$$

Тут E – одинична матриця розмірністю $m\times m$; M^{*}, C^{*}, K^{*} та K_{G}^{*} – редуковані матриці мас, демпфірування, жорсткості та геометричної жорсткості відповідно, які обчислюються за методикою [18]. Питання стохастичної стійкості параметричних коливань пологої оболонки зводиться до дослідження у середньому стійкості рівнянь від моментних функцій фазових координат другого порядку.

Редуковані матриці мас, жорсткості та геометричної жорсткості рівнянь (4) отримані за допомогою розв'язання лінійної (Linear Static), нелінійної (Nonlinear Static) задач статики та задачі стійкості (Bucling) гіперболічного параболоїда при дії сталої складової поверхневого тиску $z_{0}=q_{0}=98100\ Па$ [24].

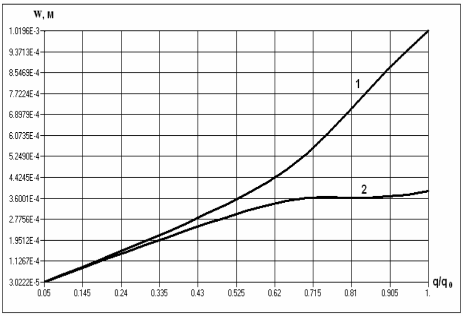
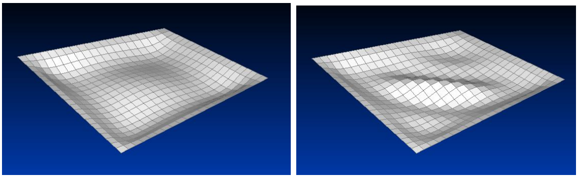


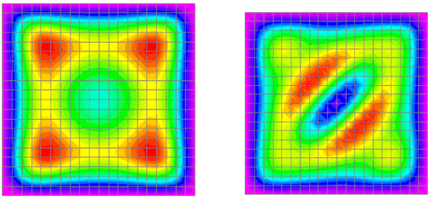
Рис. 1. Криві навантаження гіперболічного параболоїда: *1* - випукла парабола, *2*- вигнута парабола

Статична нелінійна поведінка гіперболоїда (рис. 1) співпадає з дослідженнями, результати яких наведені в працях [21, 22]. Поведінка випуклої та вигнутої парабол оболонки відрізняється при навантаженні $q \geq 0{,}62 q_0$. Оболонка стиснута вздовж випуклої параболи та розтягнута вздовж вигнутої параболи.

Деформований стан гіперболоїда на різних кроках її навантаження представлено на рис. 2.



q=0,05q_0 q=q_0



q=0,05q_0 q=q_0

Рис. 2. Деформація гіперболоїда на різних кроках статичного навантаження:

На рис. 3 наведені перші п’ять форм втрати стійкості та відповідні критичні значення навантаження, які отримані за допомогою розв’язання задачі на власні значення методом Ланцоша (Bucling). Хоча перша форма втрати стійкості гіперболічного параболоїда співпадає з результатом нелінійної задачі (рис. 2, б), при $q_{cr1} = 0{,}6992 q_0$ спостерігається втрата стійкості яка не мала місця при розв’язанні нелінійної задачі статики (Nonlinear Static) (рис. 1).

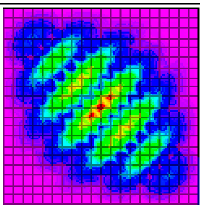
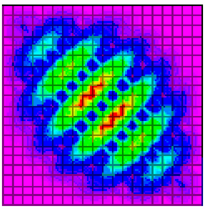
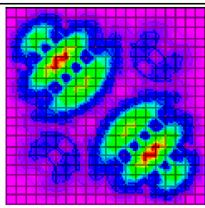
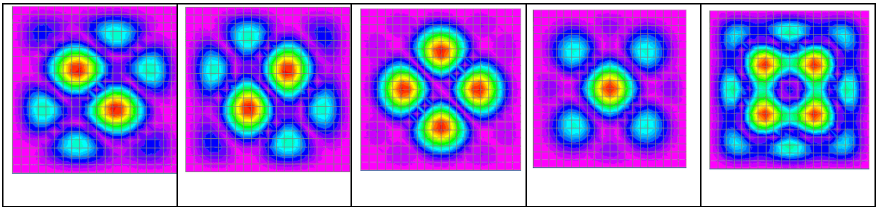
		
$q_{cr1(2)}$= 0,6992q_0	$q_{cr3(4)}$= 0,6998q_0	q_{cr5}= 0,7812q_0

Рис. 3. Перші п’ять форм втрати стійкості гіперболоїда та критичних значень сталої складової стохастичного навантаження (Bucling)

Модальний аналіз гіперболоїда виконано в лінійній (Normal Modes) і в нелінійній постановках без урахування і з урахуванням сталої складової параметричного навантаження (Nonlinear Static, Modes_Param). На рис. 4 представлені перші п'ять форм і частот власних коливань гіперболічного параболоїда.



ν_1= 570,58 *Гц*	ν_2= 570,59 *Гц*	ν_3= 576,92 *Гц*	ν_4= 583,60 *Гц*	ν_5= 728,33 *Гц*

Рис. 4. Форми власних коливань гіперболічного параболоїду (Normal Modes)

Форми коливань відрізняються від форм втрати її стійкості (рис. 3) при дії сталої складової параметричного навантаження. Спостерігаються як симетричні так і кососиметричні форми відносно парабол і осей симетрії. Особливість динамічної поведінки гіперболічного параболоїда виявлено при дослідженні частот і форм його власних коливань при дії сталої складової параметричного навантаження $z_0 = [0{,}001 - 1]q_0$ (рис. 5).

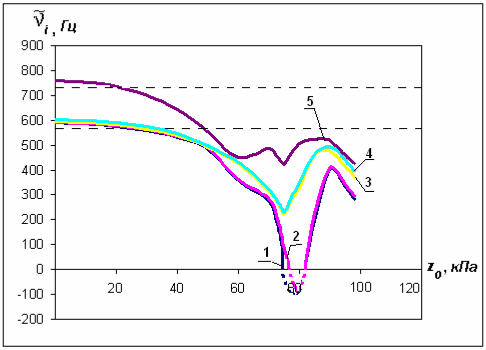


Рис. 5. Вплив сталої складової параметричного навантаження на частоту власних коливань гіперболоїда: 1–першу, 2-другу, 3-треттю, 4-четверту, 5-п'яту

Дослідження поведінки гіперболічного параболоїдадозволяють з урахуванням представити систему рівнянь (3) у вигляді

$$\frac{d}{dt}\langle\zeta_1^2(t)\rangle = 2\langle\zeta_1(t)\zeta_2(t)\rangle,$$

$$\frac{d}{dt}\langle\zeta_1(t)\zeta_2(t)\rangle = \langle\zeta_2^2(t)\rangle - \omega_i^2\langle\zeta_1^2(t)\rangle - 2\varepsilon_i\omega_i\langle\zeta_1(t)\zeta_2(t)\rangle,$$

$$\frac{d}{dt}\langle\zeta_2^2(t)\rangle = -4\varepsilon_i\omega_i\langle\zeta_2^2(t)\rangle - 2\omega_i^2\langle\zeta_1(t)\zeta_2(t)\rangle + \omega_i^4\sigma_{0i}^2\tau_0\sum_{k=1}^{5}a_{ki}^2\left\langle\zeta_1^2(t)\right\rangle, \quad (5)$$

з початковими умовами $\zeta_1(0) = y_{0i}, \zeta_2(0) = \dot{y}_{oi}$.

Тут $\zeta_1(t)=y_i(t)$, $\zeta_2(t)=\dot{y}_i(t)$ $(i,k=1,2,...,5)$; коефіцієнти a_{ki} − члени редукованої матриці геометричної жорсткості, ε_i − коефіцієнт демпфірування оболонки по i-тій частоті коливань; $m=5$ − число утриманих форм власних коливань.

2. Дослідження стохастичної стійкості параметричних коливань гіперболічного параболоїда. Вплив стохастичної складової параметричного навантаження $\tilde{z}(t)$ на моментні функції другого порядку оцінено за допомогою інтегрування системи диференціальних рівнянь (5) методом Рунге-Кутти четвертого порядку. На рис. 6 представлена динамічна поведінка розв'язку $\zeta_1^2(t)$ системи (5) та фазові траєкторії при частоті схованої періодичності стохастичного навантаження $\theta_\alpha=\omega_1=3585{,}0761\,c^{-1}$, коефіцієнті демпфірування $\varepsilon_1=0{,}002$, параметрі кореляції $\alpha=\varepsilon_1\omega_1=7{,}1702$, радіусі кореляції $\tau_0=\dfrac{2\alpha}{\alpha^2+\theta_\alpha^2}=1{,}1\cdot10^{-6}c$ та інтенсивності стохастичного навантаження $\sigma_0^2=[1-0{,}5q_{cr1}]$. При $\sigma_0^2=1{,}5\cdot10^{10}\ Па$ значення $\zeta_1^2(t)$ з часом зменшується, що відповідає стійкому режиму коливань оболонки (рис. 6, *а*). Нестійкий режим коливань спостерігається при $\sigma_0^2=2{,}814\cdot10^{10}\ Па$, коли значення $\zeta_1^2(t)$ збільшується (рис. 6, *б*). На границі області стійкості спостерігається стійкий режим параметричних коливань (рис. 6,*в*), інтенсивність стохастичного навантаження $\sigma_0^2=3{,}5\cdot10^{10}\,Па$.

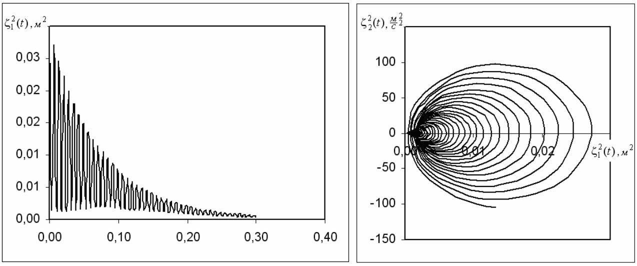
Також вплив стохастичної складової параметричного навантаження $\tilde{z}(t)$ при $z_0=0$ на стійкість гіперболоїда в першому наближенні можна дослідити, якщо систему (5) переписати у вигляді лінійної автономної системи

$$\frac{d}{dt}\begin{Bmatrix}\langle\zeta_1^2(t)\rangle\\ \langle\zeta_1(t)\zeta_2(t)\rangle\\ \langle\zeta_2^2(t)\rangle\end{Bmatrix}=G(t)\begin{Bmatrix}\langle\zeta_1^2(t)\rangle\\ \langle\zeta_1(t)\zeta_2(t)\rangle\\ \langle\zeta_2^2(t)\end{Bmatrix}, \tag{6}$$

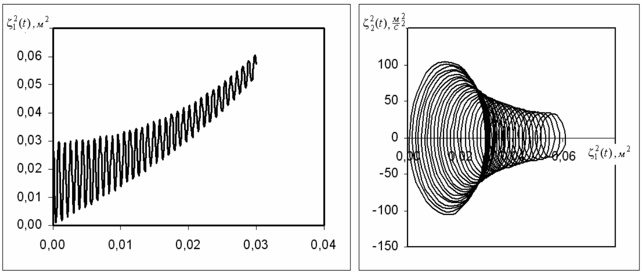
де $G(t)$ – матриця, коефіцієнти якої є $2\pi/\omega$ – періодичні функції

$$G(t)=\begin{vmatrix}0 & 2 & 0\\ -\omega_i^2 & -2\varepsilon_i\omega_i & 1\\ a_{ii}^2\omega_i^4\,\sigma_0^2\tau_0 & -2\omega_i^2 & -4\varepsilon_i\omega_i\end{vmatrix}. \tag{7}$$

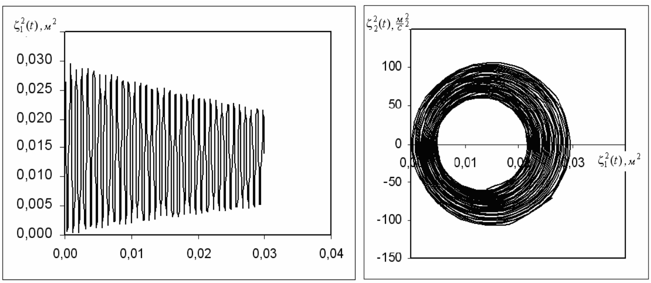
На рис. 7 представлена поведінка дійсних частин характеристичних показників Хілла системи (7) від впливу стохастичного параметричного навантаження. Частота схованої періодичності $\theta_\alpha = \omega_1 = 3585{,}0761\, c^{-1}$, параметр кореляції $\alpha = \varepsilon_1 \omega_1 = 7{,}1702$ та радіусі кореляції $\tau_0 = \dfrac{2\alpha}{\alpha^2 + \theta_\alpha^2} = 1{,}1 \cdot 10^{-6}\, c$.



а



б

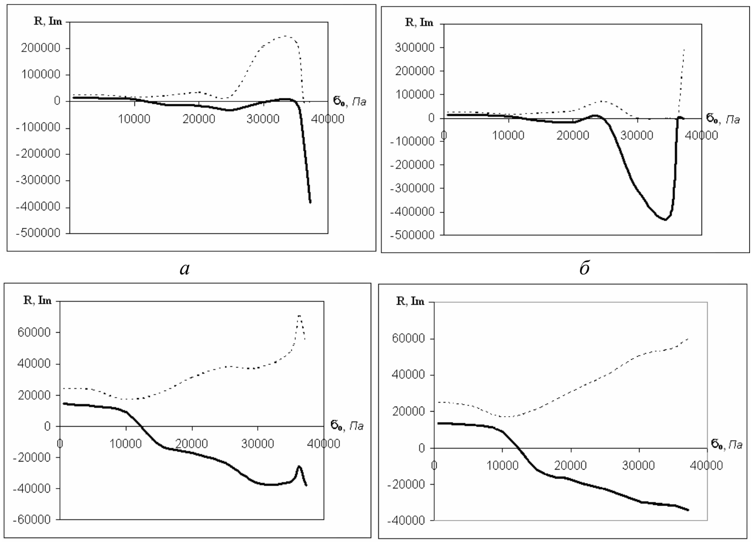


в

Рис. 6. Динамічні режими коливань оболонки при стохастичному параметричному впливі: *а* – стійкий; *б* – нестійкий; *в* – стійкий режим на границі області стійкості

Додатні дійсні частини характеристичних показників відповідають нестійкому режиму коливань і лежать у верхній півплощині, від'ємні -

стійкому і лежать у нижній півплощині. Точки перетину суцільної кривої осі координат відповідають критичним значенням стохастичної складової параметричних коливань. На рис. 8. наведена залежність критичного значення інтенсивності стохастичної складової навантаження σ_0 від відносної частоти схованої періодичності $\beta = \theta_\alpha / \omega_1$ при $\varepsilon_1 = 0,002789$ для першої частоти власних коливань гіперболічного параболоїда.



в *г*

Рис. 7. Залежність характеристичних показників Хілла від інтенсивності стохастичного впливу: *а* - *г* ε_1 =[0.0002789, 0.002789, 0.02789, 0.2789]

Стійкою є область, яка обмежена кривою *1* і віссю абсцис, нестійкою − область, яка лежить вище за криву *1*. Штриховими кривими *2* і *3* обмежена область стійкості, яка з'являється тільки при $\varepsilon_1 > 0,002789$.

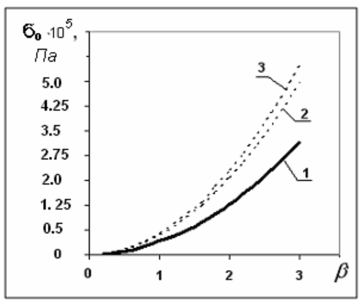


Рис. 8

Висновок. Редукована модель стійкості параметричних коливань гіперболічного параболоїда, яка представлена у вигляді диференціальних рівнянь відносно моментних функцій другого порядку, дозволила виконати якісний аналіз режимів стохастичних параметричних коливань гіперболоїда. Розв'язок задачі стохастичної стійкості отримано за допомогою прямого методу чисельного інтегрування Рунге-Кутти четвертого порядку та характеристичних показників Хілла. Визначені області динамічної нестійкості гіперболічного параболоїда та критичні значення стохастичного параметричного навантаження при різних значеннях коефіцієнта демпфірування та частоти схованої періодичності.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Болотин В.В.* Динамическая устойчивость упругих систем. - М.: Гостехиздат, 1956. − 600 с.
2. *Болотин В.В.* Случайные колебания упругих систем. - М., Наука, 1979. − 335 с.
3. *Stratonovich R.L.* Topics in the Theory of Random Noise, Vol. 1, Gordon and Breach, New York, 1963.
4. *Khasminskii R.Z.* A limit theorem for the solutions of differential equations with random right-hand sides// Theor. Probab. Its Appl., 1966. – No. 11. − С. 390-406.
5. *Кляцкин В.И.* Стохастические уравнения в случайно однородных средахю - М.: Наука, 1980. − 336 с.
6. *Вольмир А.С.* Нелинейная динамика пластин и оболочек. - М.: Наука, 1982. − 432 с.
7. *Nayfeh A.H.* The response of two-degree-of-freedom systems with quadratic nonlinearities to a parametric excitation// J. of Sound and Vibr., 1983. − vol. 88, No. 4. − P. 547-557.
8. *M.M. Klosek-Dygas, B.J. Matkowsky, Z. Schuss.* Stochastic stability of nonlinear oscillators// SIAM J. Appl. Math., 1988. − vol. 48, No. 5. − С. 1115-1127.
9. *Dimentberg M.F.* Stochastic Processes in Dynamic Systems with Variable Parameters. - М., Наука, 1989.
10. *S.T. Ariaratnam and Wei-Chau Xie.* Lyapunov exponents and stochastic stability of two-dimensional parametrically excited random systems// Trans. ASME, Ser. E. J. Appl. Mech., 1993. − vol. 60, No. 3. − С. 667-682.
11. *M. Labou.* Stochastic stability of parametrically excited random systems // Int. Appl. Mech., 2004. − vol. 40, No. 10. − P. 1175–1183.
12. *M. Labou.* Stochastic stability of three-dimensional linear systems under parametric random action// Int. Appl. Mech., 2010. − vol. 46, No. 4. − P. 124-143.
13. *M. Labou.* On stability of parametrically excited linear stochastic systems// Int. Appl. Mech., 2011− vol. 47, No. 10. − P. 1440-1453.
14. *Баженов В.А., Бусетта М., Дехтярюк Є.С., Отрашевська В.В.* Динамічна стійкість пружних систем при стохастичному параметричному збудженні// Опір матеріалів і теорія споруд. - К.: КНУБА., 2000.– Вип. 67. − С. 51-59.
15. *Дехтярюк Є.С., Лук'янченко О.О., Отрашевська В.В.* Динамічна стійкість пружних систем при комбінованому стохастичному навантаженні // Опір матеріалів і теорія споруд. К.: КНУБА, 2003. – Вип. 72. − С. 20 – 27.
16. *Гоцуляк Є.О., Дехтярюк Є.С., Лук'янченко О.О., Борисенко В.Г.* Методика редукування рівнянь в задачах параметричних коливань конструкцій // Опір матеріалів і теорія споруд. - К.: КНУБА, 2004. – Вип.74. − С. 24-34.
17. *Гоцуляк Є.О.,Дехтярюк Є.С., Лук'янченко О.О.* Побудова редукованої моделі параметричних коливань циліндричної оболонки при чистому згині// Опір матеріалів та теорія споруд. - К.: КНУБА, 2009. – Вип. 84. − С. 11-19.
18. *Баженов В.А., Дехтярюк Є.С., Лук'янченко О.О., Костіна О.В.* Чисельна побудова редукованих моделей стохастичних параметричних коливань пологих оболонок // Опір матеріалів і теорія споруд. - К.: КНУБА, 2011. – Вип. 87. − с. 73-87.

19. *Баженов В.А., Лук'янченко О.О., Ворона Ю.В., Костіна О.В.* Динамічна стійкість параметричних коливань пружних систем // Опір матеріалів і теорія споруд. - К.: КНУБА, 2015. – Вип. 95. − С.145-185.
20. *Като В., Нишимура Т.* Покрытие, образуемое сочетанием гиперболических параболоидов. В сб.: Большепролетные оболочки. - М.: Стройиздат, 1969.– С. 167-195.
21. *Самольянов И.И.* Прочность, устойчивость и колебания гиперболического параболоида. - Луцк.: Луцкий индустриальный институт, 1993. – 316 с.
22. *Сунак О.П., Ужегов С.О., Пахолюк О.А.* До визначення внутрішніх зусиль у пологій оболонці від'ємної гаусової кривини при дії вертикального навантаження// Ресурсоекономні матуріали, конструкції, будівлі та споруди. - 2012. – Вип. 23. − С. 411-416.
23. *Рабинович Р.И.* Динамический расчет пологих оболочек по нелинейной теории // В сб.: Строительное проектирование промышленных предприятий. - М.: Главпромстройпроект, 1965, № 5. – С. 45-50.
24. *Баженов В.А., Лукьянченко О.А., Ворона Ю.В., Костина Е.В.* Особенность построения редуцированной модели устойчивости параметрических колебаний гиперболического параболоида // Прикладная механика, Киев, 2017.
25. *Рычков С.П.* MSC.visualNASTRAN для Windows. - М.: НТ Пресс, 2004. – 552 с.

REFERENCES

1. *Bolotin V.V.* Dinamicheskaya ustoychivost uprugikh sistem [The Dynamic Stability of Elastic Systems]. M.: Gostekhizdat, 1956. − 600 s.
2. *Bolotin V.V.* Sluchaynye kolebanyia uprugikh sistem [Random vibrations of elastic systems].. M.: Nauka, 1979. − 335 s.
3. *Stratonovich R.L.* Topics in the Theory of Random Noise, Vol. 1, Gordon and Breach, New York, 1963.
4. *Khasminskii R.Z.* A limit theorem for the solutions of differential equations with random right-hand sides// Theor. Probab. Its Appl., 1966. – No. 11. − S. 390-406.
5. *Klyatskin V.I.* Stokhasticheskie uravneniya i volny v sluchayno-neodnorodnykh sredakh [Stochastic Equations and Waves in Randomly Inhomogeneous Media] M.: Nauka, 1980. − 336 s .
6. *Vol'mir A.C.* Nelineynaya dinamika plastin i obolochek [The Nonlinear Dynamics of Plates and Shells]. M.: Nauka, 1982. − 432 s.
7. *Nayfeh A.H.* The response of two-degree-of-freedom systems with quadratic nonlinearities to a parametric excitation// J. of Sound and Vibr., 1983. − vol. 88, No. 4. − P. 547-557.
8. *Klosek-Dygas M. M., Matkowsky B. J., Schuss Z.* Stochastic stability of nonlinear oscillators // SIAM J. Appl. Math., 1988. − vol. 48, No. 5. − S. 1115-1127.
9. *Dimentberg M.F.* Sluchaynye protsessy v dinamicheskikh sistemakh s peremennymi parametrami [Stochastic Processes in Dynamic Systems with Variable Parameters]. M.: Nauka, 1989.
10. *S.T. Ariaratnam and Wei-Chau Xie.* Lyapunov exponents and stochastic stability of two-dimensional parametrically excited random systems// Trans. ASME, Ser. E. J. Appl. Mech., 1993. − vol. 60, No. 3. − S. 667-682.
11. *M. Labou.* Stochastic stability of parametrically excited random systems // Int. Appl. Mech., 2004. − vol. 40, No. 10. − P. 1175–1183.
12. *M. Labou.* Stochastic stability of three-dimensional linear systems under parametric random action// Int. Appl. Mech., 2010. − vol. 46, No. 4. − P. 124-143.
13. *M. Labou.* On stability of parametrically excited linear stochastic systems// Int. Appl. Mech., 2011− vol. 47, No. 10. − p. 1440-1453.
14. *Bazhenov V.A., Busetta M., Dextyaryuk Ye.S., Otrashevs`ka V.V.* Dy`namichna stijkist` pruzhny`x sy`stem pry` stoxasty`chnomu parametry`chnomu zbudzhenni (Dynamic stability of elastic systems with stochastic parametric excitation) // Opir materialiv i teoriya sporud. K.: KNUBA, 2000.– V. 67. − S. 51-59.
15. *Dekhtyaryuk Ye.S., Lukyanchenko O.O., Otrashevska V.V.* Dynamichna stiykist pruzhnykh system pry kombinovanomu stokhastychnomu navantazhenni (Dynamic stability of elastic systems under

combined stochastic load) // Opir materialiv i teoriya sporud. K.: KNUBA, 2003. – V. 72. – S. 20-27.
16. *Gotsulyak Ye.O., Dekhtyaryuk Ye.S., Lukyanchenko O.O., Borysenko V.H.* Metodyka redukuvannya rivnyan' v zadachakh parametrychnykh kolyvan' konstruktsiy (Equations reduction techniques in problems of structures parametric oscillation). // Opir materialiv i teoriya sporud. K.: KNUBA, 2004. – V. 74 – S. 24-34.
17. *Gotsulyak Ye.O., Dekhtyaryuk Ye.S., Lukyanchenko O.O.* Pobudova redukovanoyi modeli parametrychnykh kolyvan' tsylindrychnoyi obolonky pry chystomu zhyni (Reduced model of a cylindrical shell parametric oscillation under pure bending)// Opir materialiv i teoriya sporud. K.: KNUBA, 2009. – V.84. – S.11-19
18. *Bazhenov V.A., Dehtyaryuk Ye.S., Lukyanchenko O.O., Kostina O.V.* Chyselna pobudova redukovanykh modelei stokhastychnykh parametrychnykh kolyvan polohykh obolonok (Numerical construction of reduced models of shallow shells stochastic parametric oscillations // Opir materialiv i teoriya sporud. K.: KNUBA, 2011. – V. 87. – S. 73-87.
19. *Bazhenov V.A., Lukyanchenko O.O., Vorona Yu.V., Kostina O.V.* Dynamichna stiikist parametrychnykh kolyvan pruzhnykh system (Dynamic stability of elastic systems parametric oscillations) // Opir materialiv i teoriia sporud. - K.: KNUBA, 2015. - V. 95. – S. 159-186.
20. *Kato V., Nishimura T.* Pokrytie, obrazuemoe sochetaniem giperbolicheskih paraboloidov. (Coverage, formed by a combination of hyperbolic paraboloids). - Sb.: Bol`sheproletnye obolochki. - M.: Stroyizdat, 1969. - S. 167-195.
21. *Samolyanov I.I.* Prochnost, ustoychivost i kolebaniya giperbolicheskogo paraboloida (Strength, stability, and oscillations of a hyperbolic paraboloid). - Lutsk.: Lutskiy industrialnyiy institut, 1993. – 316 s.
22. *Sunak O.P., Uzhegov S.O., Paholyuk O.A.* Do vy`znachennya vnutrishnix zusy`l` u pologij obolonci vid'yemnoyi gausovoyi kry`vy`ny` pry` diyi verty`kal`nogo navantazhennya (To the determination of internal forces in a smooth shell of a negative Gaussian curvature under the action of vertical load) // Resursoekonomni materialy, konstruktsii, budivli ta sporudy. - 2012. – V. 23. – S. 411-416.
23. *Rabinovich R.I.* Dinamicheskiy raschet pologih obolochek po nelineynoy teorii (Dynamic calculation of shallow shells by nonlinear theory) // V sb.: Stroitelnoe proektirovanie promyishlennyih predpriyatiy. - M.: Glavpromstroyproekt, 1965, # 5. - S. 45-50.
24. *Bazhenov V.A., Lukyanchenko O.A., Vorona Yu.V., Kostina E.V.* Osobennost postroeniya redutsirovannoy modeli ustoychivosti parametricheskih kolebaniy giperbolicheskogo paraboloida (The peculiarity of constructing a reduced model of stability of parametric oscillations of a hyperbolic paraboloid) // Prikladnaya mehanika, Kiev, 2017.
25. *Ryichkov S.P.* MSC. visual NASTRAN dlya Windows. - M.: NT Press, 2004. – 552 s.

Vorona Yu.V., Lukyanchenko O.O., Kostina O.V.

STOCHASTIC STABILITY OF PARAMETRIC OSCILLATIONS OF A HYPERBOLIC PARABOLOID

The stochastic stability of a hyperbolic paraboloid shallow shell parametric oscillations is investigated.. The shell is exposed to a delta-correlated random load and its vibrations are studied on the average using the second order moment functions of phase coordinates. A system of differential equations with constant coefficients for the first Markov approximation of second moments is obtained using the functional approach and the reduced discrete mathematical model. The reduced mass matrix, stiffness matrix and geometric stiffness matrix were obtained in previous paper of the authors using modern finite-element analysis software and developed computer code. The asymptotic method based on the statistical characteristics of the dynamic problem solutions expansion with respect to a small parameter is used as well. As a result of the analysis of the constant component of the parametric load influence on its eigenfrequencies, the loss of stability of the hyperboloid shell in a certain range of load and subsequent transition into the zone of stability was detected. This feature is taken into account in this article when studying the stochastic stability of parametric oscillations of a hyperbolic paraboloid shell under the action of a delta-correlated stochastic loads. A qualitative analysis of the hyperboloid stochastic parametric oscillations modes under the action of surface pressure is performed using the fourth-order direct Runge-Kutta numerical integration method and Hill's characteristic exponents. The regions of dynamic instability of a hyperbolic paraboloid shell are determined and the critical values of the stochastic load are determined.

Keywords: nonlinear stability, stochastic stability, parametric oscillations, functional approach, hyperbolic paraboloid

Ворона Ю.В., Лукьянченко О.А., Костина Е.В.

СТОХАСТИЧЕСКАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ ПАРАМЕТРИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЙ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ПАРАБОЛОИДА

Исследована стохастическая устойчивость параметрических колебаний гиперболического параболоида при действии дельта-коррелированной стохастической нагрузки в среднем на основе моментных функций фазовых координат второго порядка. Получена система дифференциальных уравнений первого марковского приближения для вторых моментов с постоянными коэффициентами с помощью функционального подхода, метода конечных элементов и асимптотического метода, основанного на разложении статистических характеристик решений динамической задачи по малому параметру. Выполнен качественный анализ режимов стохастических параметрических колебаний гиперболоида при действии поверхностного давления с помощью прямого метода численного интегрирования Рунге-Кутты четвертого порядка и характеристических показателей Хилла. Определены области динамической неустойчивости гиперболического параболоида и критические значения стохастического нагрузки.

Ключевые слова: нелинейная устойчивость, стохастическая устойчивость, параметрические колебания, функциональный подход, гиперболический параболоид.

УДК 539.3

Ворона Ю.В., Лук'янченко О.О., Костіна О.В. **Стохастична стійкість параметричних коливань гіперболічного параболоїда** // Опір матеріалів і теорія споруд: наук.-тех. збірн. – К.: КНУБА, 2017. – Вип. 98. – С. 150-162.

Досліджена стохастична стійкість параметричних коливань гіперболічного параболоїда при дії дельта-корельованого стохастичного навантаження у середньому на основі моментних функцій фазових координат другого порядку.

Табл. 0. Іл. 8. Бібліогр. 25 назв.

Vorona Yu.V., Lukyanchenko O.O., Kostina O.V. **Stochastic stability of parametric oscillations of a hyperbolic paraboloid** // Strength of Materials and Theory of Structures. – 2017. – Issue. 98. – P. 150-162.

Parametric oscillations stochastic stability of a hyperbolic paraboloid is investigated. The shell is exposed to a delta-correlated random load and its vibrations are studied on the average using the second order moment functions of phase coordinates.

Tables 0. Fig. 8. Ref. 25 items.

Ворона Ю.В., Лукьянченко О.А., Костина Е.В. **Стохастическая устойчивость параметрических колебаний гиперболического параболоида** / Сопротивление материалов и теория сооружений: науч.-тех. сборн. – К.: КНУСА,, 2017. – Вып. 98. – С. 150-162. – Укр.

Исследована стохастическая устойчивость параметрических колебаний гиперболического параболоида при действии дельта-коррелированной стохастической нагрузки в среднем на основе моментных функций фазовых координат второго порядка.

Табл. 0. Ил. 8. Библиогр. 25 назв.

Автор (науковий ступінь, вчене звання, посада): *кандидат технічних наук, старший науковий спіробітник, професор кафедри будівельної механіки КНУБА, ВОРОНА Юрій Володимирович*
Адреса робоча: *03680, Київ, Повітрофлотський проспект, 31, Київський національний університет будівництва і архітектури, ВОРОНІ Юрію Володимировичу*
Робочий тел.: *+38(044)245-48-29*
Мобільний тел.: *+38(050)750-13-61*
E-mail: yuvv@ukr.net

Автор (науковий ступінь, вчене звання, посада): *кандидат технічних наук, старший науковий співробітник НДІ будівельної механіки КНУБА, ЛУК'ЯНЧЕНКО Ольга Олексіївна.*
Адреса робоча: *03680, Україна, м. Київ, Повітрофлотський проспект 31, Київський національний університет будівництва і архітектури, ЛУК'ЯНЧЕНКО Ользі Олексіївні.*
Адреса домашня: *02152, Україна, м. Київ, вул. Івана Миколайчука 5/1, кв. 2, ЛУК'ЯНЧЕНКО Ользі Олексіївні.*
Робочий тел.: *+38(044) 245-40-20.*
Мобільний тел.: *+38(067) 931-30-27.*
E-mail: lukianch0907@meta.ua

Автор (науковий ступінь, вчене звання, посада): *кандидат технічних наук, старший науковий співробітник НДІ будівельної механіки КНУБА, КОСТІНА Олена Володимирівна.*
Адреса робоча: *03680, Україна, м. Київ, Повітрофлотський проспект 31, Київський національний університет будівництва і архітектури, КОСТІНІЙ Олені Володимирівні.*
Адреса домашня: *03067, Україна, м. Київ, вул. Виборзька 17/19, кв. 41, КОСТІНІЙ Олені Володимирівні.*
Робочий тел.: *+38(044) 245-40-20.*
Мобільний тел.: *+38(098) 275-19-93.*
E-mail: kl0867@meta.ua