

УДК 539.3

ДЕФОРМУВАННЯ ПРУЖНИХ НЕОДНОРІДНИХ ОБОЛОНОК ПІД ДІЄЮ НЕСТАЦІОНАРНИХ ДИНАМІЧНИХ НАВАНТАЖЕНЬ

В.К. Чибіряков,

доктор технічних наук, професор, завідувач кафедри вищої математики

О.П. Кривенко,

кандидат технічних наук, старший науковий співробітник, провідний науковий співробітник

А.Д. Легостаєв,

кандидат технічних наук, доцент

Н.А. Гречух,

науковий співробітник

*Київський національний університет будівництва і архітектури
Повітрофлотський просп., 31, м. Київ. 03680*

Запропоновано алгоритм дослідження нестационарних коливань оболонок неоднорідної структури при дії короткочасних динамічних навантажень. Методику побудовано на основі розробленої авторами скінченноелементної моделі тонкої пружної оболонки з різними геометричними особливостями за товщиною і створеної на її базі для задач динаміки редукованої моделі. Дано кількісне обґрунтування методу. Виконано порівняння розв'язків з теоретичними даними та результатами розрахунків, отриманими за програмним комплексом Scad.

Ключові слова: тонка пружна оболонка, універсальний просторовий скінченний елемент, редукована модель, імпульсне навантаження.

Вступ. Широке застосування оболонкових конструкцій у будівництві та різних галузях сучасної техніки визначається вимогами міцності та надійності, архітектурними рішеннями, технологічними потребами, економічними факторами та іншими чинниками. Оболонкові системи можуть поєднувати у собі різноманітні конструктивні неоднорідності: гладко-змінну товщину, ребра та накладки, підкріплені та невідкріплені отвори, виїмки, місцеві потовщення та стоншення, злами серединної поверхні та інші особливості, а всю конструкцію необхідно розглядати як оболонку змінної жорсткості. У цьому випадку класичні розрахункові схеми, методи й алгоритми виявляються малоефективними або зовсім непридатними.

Більшість робіт, що відносяться до дослідження оболонок ступінчасто-змінної товщини, присвячено статичі оболонок [1-3]. Незважаючи на інтенсивні дослідження, що проводяться впродовж останніх років, та певні досягнення, які отримані в теорії та методах розрахунку нестационарного деформування оболонок, на сьогодні

залишається ще багато нез'ясованих питань і невирішених проблем в області вивчення поведінки оболонкових конструкцій при динамічному навантаженні [4-14]. У першу чергу це стосується задач про реакцію оболонок на короткочасне (ударне й імпульсне) навантаження [5, 8, 10-14]. Вивчення особливостей поведінки оболонкових конструкцій (наприклад, літальних апаратів, суден, автомобілів і т.п.) при дії різко змінюваних навантажень викликає інтерес не тільки у теоретичному плані, а й з практичної точки зору [13]. Тому продовжують бути актуальними дослідження в області моделювання нестационарних процесів короткочасного характеру, що мають місце в пружних неоднорідних оболонках. Такий вид динамічних навантажень зустрічається, наприклад, при проектуванні споруд з урахуванням екстремальних впливів типу: удару від летючих тіл різної природи, вибуху, торнадо та штормів, падіння вантажів тощо [14]. Відомо, що дія зазначеного динамічного навантаження великої потужності може спричинити лише формозміну механічної системи, а самі оболонкові об'єкти можуть сприймати імпульсні навантаження досить високого рівня, не руйнуючись при цьому. Цей ефект використовується, наприклад, у технології формування оболонкових конструкцій з плоских заготовок при дії імпульсного навантаження [10]. Виявлено, що поведінка пружної оболонки, яка знаходиться під дією імпульсного навантаження, істотно відрізняється від аналогічної поведінки при статичному навантаженні [15]. Крім того вона може не втрачати стійкості, навіть коли статичне напруження (від імпульсу певної величини) досягає критичного значення [5]. Тому при формуванні оболонки з використанням динамічного навантаження вдається, на відміну від статичного, уникнути появи втрати стійкості та відповідного хвилеутворення матеріалу заготовки внаслідок підвищення рівня критичних навантажень.

При дослідженні деформування оболонкових конструкцій під дією динамічних навантажень чисельне математичне моделювання стало основним засобом вивчення їхньої поведінки через складність розв'язуваних задач, особливо це стосується неоднорідних оболонок. Найбільш успішно ця проблема може бути вирішена з позицій тривимірної теорії пружності та реалізації метода скінченних елементів на основі розробки та застосування універсальних просторових скінченних елементів [1-2, 7-9]. У теперішній час такий загальний підхід при дослідженні тонких оболонок набуває все більшого поширення і відповідає сучасним тенденціям розвитку нових методів їх розрахунку.

1. Постановка задачі. У роботі під імпульсними навантаженнями розуміються короткочасні сили й удари, що характеризуються помірно величиною імпульсу та не здатні викликати в елементах оболонкової конструкції макропластичних деформацій [11, 16]. Таким чином, під імпульсними навантаженнями (одноразової дії) будемо розуміти

короточасні сили сталого напрямку, що мають не більше одного максимуму за час її неперервної дії τ (рис. 1)

$$F(t) = P_0 \begin{cases} f(t), & \text{при } t \in [0, \tau] \\ 0, & \text{при } t > \tau \end{cases},$$

де $t=0$ – початок дії навантаження, P_0 – її максимум (інтенсивність), $f(t)$ – функція, що характеризує форму імпульсу, причому $|f(t)|=1$. Зазначені навантаження характеризуються трьома параметрами: 1) тривалістю дії τ ; 2) формою імпульсу $f(t)$; 3) найбільшою величиною P_0 . На рис. 2 показані деякі форми короточасних навантажень: прямокутна, трикутна та параболічна.

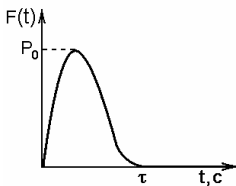


Рис. 1. Функція навантаження у часі $F(t)$

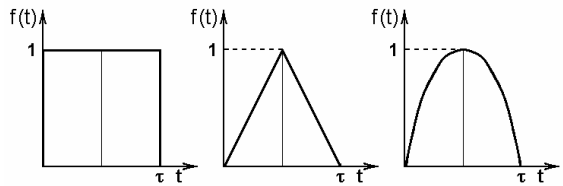


Рис. 2. Приклади форм короточасних навантажень $f(t)$

Тривалість дії експлуатаційних імпульсних навантажень, що є характерними, наприклад, для промислових будівель, має своїм мінімумом величину, яка є близькою до $\tau_{min} = 0,001$ с [16]. Реакція пружної системи на короточасне навантаження залежить від відношення τ до найменшого періоду власних коливань системи, що враховується T_n . Якщо $\tau/T_n \leq 0,1$, тоді імпульс сили можна вважати миттєвим, а реакцію системи такою, що залежить тільки від величини імпульсу. При $\tau/T_n > 0,1$ реакція системи залежить від усіх трьох параметрів навантаження. Якщо $\tau/T_1 > 2,5$, де T_1 – основний період власних коливань системи, тоді такі навантаження вже втрачають характер імпульсу.

З трьох параметрів імпульсу вирішальний вплив на реакцію системи справляють його величина та тривалість; форма ж імпульсу має другорядний вплив [16].

Методика дослідження нестационарних коливань оболонок від дії короточасних навантажень ґрунтується на застосуванні до розроблених в [1, 2] скінченноелементних моделей оболонок неоднорідної структури редукованих моделей за методом базисних вузлів [9].

Під оболонкою неоднорідної структури (або неоднорідною оболонкою) у роботі розуміється оболонка, що має: 1) геометричні особливості за товщиною у вигляді ділянок ступінчасто-змінної та гладко-змінної товщини зі зламами серединної поверхні та отворами; 2) різні умови закріплення контуру на різних ділянках; 3) неоднорідні за планом навантаження.

Методика [1, 2], що використовується у роботі, базується на співвідношеннях тривимірної теорії термопружності з використанням апарата тензорного числення, геометрично нелінійному формулюванні задачі в приростах і застосуванні моментної схеми скінченних елементів (МССЕ). При розробці методу використана модель лінійно-пружного суцільного середовища, властивості якого відповідають узагальненому закону Дюамеля–Неймана, при великих переміщеннях і малих деформаціях. Метод [1, 2] призначений для чисельного дослідження статичних процесів геометрично нелінійного деформування, втрати стійкості та закритичної поведінки широкого класу тонких оболонок при термосилових навантаженнях. Моделювання неоднорідної оболонки реалізується модифікованим універсальним просторовим скінченним елементом (СЕ), який, за рахунок введених додаткових змінних параметрів, може бути ексцентрично розташованим відносно серединної поверхні обшивки та змінювати свої розміри в напрямку товщини.

При побудові скінченноелементної моделі оболонки (СЕМО) тонка оболонка розглядається як тривимірне тіло, яке моделюється за товщиною одним ізопараметричним просторовим СЕ з полілінійними функціями форми. Особливості НДС тонкої неоднорідною оболонки враховані використанням двох неklasичних гіпотез: про сталість нормальних напружень обтиснення волокон шару по товщині та деформівної прямиї в напрямку товщини. Застосування останньої кінематичної гіпотези дозволило виконати стикування елементів обшивки і її ділянок з геометричними особливостями без порушення нерозривності за координатами і переміщеннями. На базі універсального СЕ розроблена єдина розрахункова модель, що враховує геометричні особливості конструктивних елементів неоднорідної оболонки: обшивку змінної товщини, ребра і накладки, виїмки, канали й отвори, злами серединної поверхні, тощо.

У роботі побудова редукованої моделі СЕМО (підхід, що зазвичай використовується при розв'язанні задач динаміки) виконується із застосуванням методу базисних вузлів [9, 17], який не пов'язаний зі способом дискретизації вихідної задачі. Суть методу, що набув розвитку стосовно скінченноелементної моделі оболонкової конструкції неоднорідної структури, докладно описаний у [9]. Слід зазначити, що розв'язок задачі побудовано без урахування сил опору. Загалом при дослідженні нестационарних коливань на значних проміжках по часовій

координаті необхідно до вихідної математичної моделі залучати складові, які приводять до згасання коливань. Оскільки демпфірування не враховується, тому розроблена методика дозволяє адекватно досліджувати тільки початковий процес нестационарних коливань.

Вивчення поведінки пружної оболонки при дії короткочасного навантаження вважається повним, якщо в дослідженні розглядаються великі переміщення з позицій геометрично нелінійної теорії. Але дослідження початкової стадії перехідного процесу може бути виконано на основі відповідних лінеаризованих співвідношень [8].

Таким чином, методика є ефективним хоча і наближеним засобом, що дозволяє зробити оцінку параметрів нестационарних коливань оболонок неоднорідної структури при дії короткочасного навантаження.

2. Чисельна методика дослідження пружних оболонок від дії нестационарних динамічних навантажень з використанням редукованих моделей. Побудова рівнянь руху скінченноелементної моделі оболонки виконується на основі принципу можливих переміщень у поєднанні з принципом Д'Аламбера [4]. При скінченноелементному формулюванні динамічної задачі у формі методу переміщень зазвичай після лінеаризації вихідних співвідношень приходимо до розв'язувальної системи рівнянь у вигляді системи звичайних диференціальних рівнянь другого порядку [7-9]

$$[M]\{\overset{t}{\ddot{q}}\} + [K]\{\overset{t}{q}\} - \{\overset{t}{P}\} = 0, \quad (1)$$

де $\{u\}$, $\{\dot{u}\}$ – N -вимірні вектори узагальнених переміщень і прискорень вузлів дискретної моделі конструкції (N – загальне число ступенів свободи моделі); $[M]$ – узгоджена матриця мас усієї моделі конструкції, вона характеризує інерційні властивості оболонки; $[K]$ – матриця жорсткості СЕМО; $\{\overset{t}{P}\}$ – вектор узагальнених вузлових сил; верхній лівий значок « t » показує залежність векторів від часу.

Для того щоб розв'язок системи (1) мав сенс, необхідно задати початкові умови, які повинні визначати у початковий момент часу $t = t_0$ (без втрати загальності – у нульовий момент часу $t = 0$) поле переміщень $\{^0u\}$ і швидкостей $\{^0\dot{u}\}$, тобто

$$\{u(t)\}|_{t=t_0} = \{^0u\}, \quad \{\dot{u}(t)\}|_{t=t_0} = \{^0\dot{u}\}. \quad (2)$$

Методика дослідження нестационарних коливань оболонок від дії короткочасних навантажень базується на застосуванні редукованих моделей, число ступенів свободи яких істотно менше ніж вихідної дискретної скінченноелементної моделі оболонки, але при цьому нижча частина спектра редукованих частот вихідної і редукованої моделей збігаються. Редукована система розв'язувальних рівнянь, що отримана методом базисних вузлів [9], має вигляд

$$[\tilde{M}]\{\dot{q}\} + [\tilde{K}]\{q\} - \{\tilde{P}\} = 0, \quad (3)$$

де

$$[\tilde{M}] = [U]^T [M][U], \quad (4)$$

$$[\tilde{K}] = [U]^T [K][U], \quad (5)$$

$$\{\tilde{P}\} = [U]^T \{P\}, \quad (6)$$

відповідно матриці мас і жорсткості, які характеризують рух редукованої моделі, а також вектор узагальнених сил для нової моделі. Правий верхній значок « T » означає транспоновану матрицю. $[U]$ – матриця перетворень, яка встановлює зв'язок між переміщеннями вихідної СЕМО $\{u\}$ та новими невідомими (що мають назву – нові узагальнені координати) редукованої СЕМО $\{q\}$. Цей зв'язок визначається за формулою

$$\{u^k\} = [U_{kr}]\{q^r\}, \quad k = \overline{1, N}, \quad r = \overline{1, \Omega}, \quad (7)$$

де N і Ω – число ступенів свободи вихідної та редукованої моделей.

Відповідно до (2) невідомі шукані функції $\{q\}$ мають задовольняти початковим умовам при $t = t_0$

$$\{q\}_{t=t_0} = \{q_0\}, \quad \{\dot{q}\}_{t=t_0} = \{\dot{q}_0\}, \quad (8)$$

або, не втрачаючи загальності при $t = 0$

$$\{q\}_{t=0} = \{q_0\}, \quad \{\dot{q}\}_{t=0} = \{\dot{q}_0\}. \quad (8')$$

За нові змінні (нові узагальнені координати) $\{q\}$ приймаються переміщення деякої сукупності вузлів вихідної СЕМО, що довільним чином розташовані у сітковій області моделі (тобто довільним чином виділені із повного набору вузлів моделі). Ці вузли називаються базисними (або опорними) вузлами редукованої СЕМО. Таким чином, згідно з методом базисних вузлів число ступенів свободи Ω редукованої моделі відповідає числу переміщень тільки заданої (спеціально вибраної) сукупності базисних вузлів, а число компонент базисних векторів, що входять до складу матриці перетворень $[U]$ у (7), збігається з числом ступенів свободи повної СЕМО. Отже, кількість рядків матриці перетворень $[U]$ дорівнює числу ступенів свободи вихідної СЕМО N , а кількість стовпчиків – кількості узагальнених координат редукованої моделі Ω . Таким чином, побудова редукованої моделі виконується без погіршення просторової апроксимації вихідної СЕМО. Методика побудови матриці перетворень $[U]$ докладно описана в [9].

За своєю суттю, матричне рівняння (3) є системою звичайних диференціальних рівнянь за часовою координатою. Ця система є зв'язаною, і тому одним із варіантів побудови її загального розв'язку, що

визначає поведінку редукованої моделі за часом, полягає в перетворенні зв'язаної системи диференціальних рівнянь до незв'язаної. Це можливо, оскільки матриці мас $[\tilde{M}]$ і жорсткості $[\tilde{K}]$ в співвідношенні (3) є симетричними та додатно-визначеними величинами, а також є редукованими завдяки застосуванню методу базисних вузлів та характеризуються невеликою розмірністю, на відміну від відповідних матриць вихідної СЕМО.

Через те, що матриця мас $[\tilde{M}]$ є додатно-визначеною, тому існує корінь з цієї матриці. Оскільки матриця мас, що використовується в методі, є узгодженою, яка має блочну структуру і не є діагональною [18], тому знаходження $\sqrt{[\tilde{M}]}$, виконується за наступним алгоритмом.

Спочатку знаходяться нормовані власні вектори $\{\varphi_i^{\tilde{M}}\}$ та власні числа $\{\lambda_i^{\tilde{M}}\}$ матриці мас $[\tilde{M}]$, які розташовуються у зростаючому порядку, починаючи з меншого власного числа. З власних векторів матриці $[\tilde{M}]$ складається матриця $[S^{\tilde{M}}] = \{[\varphi_1^{\tilde{M}}] \dots [\varphi_r^{\tilde{M}}] \dots [\varphi_\Omega^{\tilde{M}}]\}$, яка є ортогональною. Завдяки цьому обернена і транспонована матриці збігаються

$$[S^{\tilde{M}}]^T = [S^{\tilde{M}}]^{-1} \text{ або } [S^{\tilde{M}}] \cdot [S^{\tilde{M}}]^T = [I], \quad (9)$$

де $[I]$ – одинична матриця.

Далі матрицю $[\tilde{M}]$ приводимо до діагонального вигляду [19]

$$[S^{\tilde{M}}]^T [\tilde{M}] [S^{\tilde{M}}] = \text{diag}[\lambda_1^{\tilde{M}} \quad \dots \quad \lambda_i^{\tilde{M}} \quad \dots \quad \lambda_\Omega^{\tilde{M}}] = [M^*] \quad (10)$$

і звідси знаходимо

$$\sqrt{[M^*]} = \text{diag}[\sqrt{\lambda_1^{\tilde{M}}} \quad \dots \quad \sqrt{\lambda_i^{\tilde{M}}} \quad \dots \quad \sqrt{\lambda_\Omega^{\tilde{M}}}] \quad (11)$$

Квадратний корінь з редукованої матриці мас визначається співвідношенням

$$\sqrt{[\tilde{M}]} = [S^{\tilde{M}}]^T \sqrt{[M^*]} [S^{\tilde{M}}]. \quad (12)$$

Побудована у такий спосіб матриця $\sqrt{[\tilde{M}]}$ є основою для подальшого перетворення динамічних рівнянь редукованої моделі (3). Наступні кроки такі.

Крок перший. Подаючи матрицю $[\tilde{M}]$ у вигляді $[\tilde{M}] = \sqrt{[\tilde{M}]} \cdot \sqrt{[\tilde{M}]}$, множимо ліву і праву частини (3) ліворуч на $(\sqrt{[\tilde{M}]})^{-1}$

$$(\sqrt{[\tilde{M}]})^{-1} \left[\sqrt{[\tilde{M}]} \cdot \sqrt{[\tilde{M}]} \{ {}^t \ddot{q} \} + [\tilde{K}] \{ {}^t q \} \right] = (\sqrt{[\tilde{M}]})^{-1} \{ {}^t \tilde{P} \}.$$

Оскільки $\left(\sqrt{[\tilde{M}]}\right)^{-1} \cdot \sqrt{[\tilde{M}]} = [I]$ маємо

$$\sqrt{[\tilde{M}]} \frac{d^2 \{^t q\}}{dt^2} = -\left(\sqrt{[\tilde{M}]}\right)^{-1} [\tilde{K}] \{^t q\} + \left(\sqrt{[\tilde{M}]}\right)^{-1} \{^t \tilde{P}\}. \quad (13)$$

Виконаємо тотожне перетворення в правій частині (13) та отримаємо

$$\sqrt{[\tilde{M}]} \frac{d^2 \{^t q\}}{dt^2} = -\left(\sqrt{[\tilde{M}]}\right)^{-1} [\tilde{K}] \left(\left(\sqrt{[\tilde{M}]}\right)^{-1} \cdot \sqrt{[\tilde{M}]} \right) \{^t q\} + \left(\sqrt{[\tilde{M}]}\right)^{-1} \{^t \tilde{P}\}. \quad (14)$$

Введемо позначення

$$\{^t q^*\} = \sqrt{[\tilde{M}]} \{^t q\}, \quad (15)$$

$$[K^*] = \left(\sqrt{[\tilde{M}]}\right)^{-1} [\tilde{K}] \left(\sqrt{[\tilde{M}]}\right)^{-1}, \quad (16)$$

$$\{^t P^*\} = \left(\sqrt{[\tilde{M}]}\right)^{-1} \{^t \tilde{P}\}. \quad (17)$$

і подамо рівняння (14) з урахуванням (15)-(17) у канонічному вигляді

$$\frac{d^2 \{^t q^*\}}{dt^2} = -[K^*] \{^t q^*\} + \{^t P^*\}. \quad (18)$$

На другому кроці приведемо систему зв'язаних диференціальних рівнянь до системи незв'язаних рівнянь. Спочатку подамо матрицю $[K^*]$ у діагональному вигляді. Для цього знаходимо власні числа $\{\lambda_i^{K^*}\}$ та нормовані власні вектори матриці $[K^*]$. Як і вище утворимо матрицю $[S^{K^*}]$, стовпчиками якої є компоненти знайдених власних векторів.

Оскільки матриця $[K^*]$ є симетричною, тому її власні вектори взаємно ортогональні. А через те, що ці вектори є нормованими, тому матриця $[S^{K^*}]$ є ортогональною, а обернена до неї збігається з транспонованою $[S^{K^*}]^{-1} = [S^{K^*}]^T$.

Зв'язана система звичайних диференціальних рівнянь (18) за допомогою матриці $[S^{K^*}]$ може бути приведена до незв'язаної системи окремих диференціальних рівнянь у результаті наступних дій.

Помножимо співвідношення (18) зліва на $[S^{K^*}]^T$

$$[S^{K^*}]^T \frac{d^2 \{^t q^*\}}{dt^2} = -[S^{K^*}]^T [K^*] \{^t q^*\} + [S^{K^*}]^T \{^t P^*\}. \quad (19)$$

Виконаємо тотожне перетворення в правій частині (19), враховуючи, що

$$[S^{K^*}]^T = [S^{K^*}]^{-1} \text{ або } [S^{K^*}] \cdot [S^{K^*}]^T = [I]. \quad (20)$$

Тоді маємо

$$[S^{K^*}]^T \frac{d^2 \{ {}^t q^* \}}{dt^2} = -[S^{K^*}]^T [K^*] \left([S^{K^*}] \cdot [S^{K^*}]^T \right) \{ {}^t q^* \} + [S^{K^*}]^T \{ {}^t P^* \}. \quad (21)$$

Враховуючи в (21), що

$$[S^{K^*}]^T [K^*] [S^{K^*}] = [\Lambda], \text{ де } [\Lambda] = \text{diag}[\lambda_1^{K^*} \quad \dots \quad \lambda_i^{K^*} \quad \dots \quad \lambda_\Omega^{K^*}],$$

та вводячи позначення

$$\{ {}^t q^{**} \} = [S^{K^*}]^T \{ {}^t q^* \}, \quad (22)$$

$$\{ {}^t P^{**} \} = [S^{K^*}]^T \{ {}^t P^* \}. \quad (23)$$

остаточно отримаємо співвідношення

$$\frac{d^2 \{ {}^t q^{**} \}}{dt^2} + \lambda_i^{K^*} \{ {}^t q^{**} \} = \{ {}^t P^{**} \}, \quad i = \overline{1, \Omega}, \quad (24)$$

які є системою Ω незв'язаних диференціальних рівнянь другого порядку.

Аналогічні перетворення виконуються з заданими початковими умовами (8). У результаті отримаємо початкові умови для $\{ {}^t q^{**} \}$ та їхніх похідних у момент часу $t = t_0$

$$\{ {}^{t=t_0} q^{**} \} = \{ {}^{t_0} q^{**} \}, \quad \{ {}^{t=t_0} \dot{q}^{**} \} = \{ {}^{t_0} \dot{q}^{**} \}. \quad (25)$$

Це дає Ω окремих задач для звичайних диференціальних рівнянь другого порядку з початковими умовами, тобто Ω задач Коші (24-25).

Крок третій. Розв'язання кожної окремої задачі Коші виконується за методом Рунге-Кутти четвертого порядку точності. Враховуючи, що метод Рунге-Кутти орієнтований на розв'язання диференціальних рівнянь першого порядку, подамо систему (24) у вигляді 2Ω рівнянь, вводячи нові змінні – вузлові швидкості $\{ {}^t v^{**} \}$,

$$\begin{cases} \frac{d \{ {}^t q_j^{**} \}}{dt} = \{ {}^t v_j^{**} \}, \\ \frac{d \{ {}^t v_i^{**} \}}{dt} = -\lambda_{(i)}^{K^*} \{ {}^t q_i^{**} \} = \{ {}^t P_i^{**} \}, \end{cases} \quad j = \overline{1, \Omega}; \quad i = \overline{\Omega+1, 2\Omega}. \quad (26)$$

При цьому початкові умови (25) при $t = t_0$ набувають вигляду

$$\begin{cases} \{ {}^{t=\tau} q_i^{**} \} = \{ {}^\tau q_i^{**} \} - \text{початкове переміщення,} \\ \{ {}^{t=\tau} v_j^{**} \} = \{ {}^\tau v_j^{**} \} - \text{початкова швидкість.} \end{cases} \quad (27)$$

У результаті інтегрування Ω окремих систем з двох рівнянь (26) за методом Рунге-Кутти знаходимо значення компонент векторів переміщень $\{ {}^t q_i^{**} \}$ і швидкостей $\{ {}^t v_j^{**} \}$.

Крок четвертий. Для кожного моменту часу після знаходження Ω розв'язків відповідних задач Коші виконується зворотній перехід за

формулами (22, 15) від знайденого переміщення $\{^t q^{**}\}$ до переміщення $\{^t q^*\}$ та від обчисленого $\{^t q^*\}$ до переміщення $\{^t q\}$, що визначає шуканий розв'язок.

Таким чином, із залежностей (15, 22), на кожному кроці за часом, враховуючи (20), послідовно знаходимо шукані переміщення (нові узагальнені координати) редукованої СЕМО

$$\{^t q^*\} = \{^t q^{**}\} [S^{K^*}]^{-1}, \quad (28)$$

$$\{^t q\} = \{^t q^*\} \sqrt{[\tilde{M}]}^{-1}. \quad (29)$$

Підставляючи знайдений розв'язок (29) у формулу перетворень (7), знаходимо переміщення вузлів вихідної СЕМО, за якими визначається напружено-деформований стан неоднорідної оболонки в момент часу, що розглядається.

3. Результати розрахунку та аналіз розв'язків. Дослідження нестационарних коливань тонкостінної конструкції від дії короткочасного навантаження проведено на прикладі шарнірно опертих балок (рис. 3).

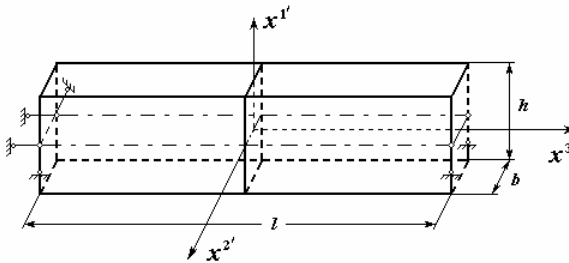


Рис. 3

Вихідні дані взяті відповідно до [21]. Геометричні характеристики балки: довжина $l = 800$ см, ширина $b = 40$ см та висота перерізу $h = 80$ см; характеристики матеріалу (бетон марки М100): модуль пружності $E = 3 \cdot 10^7$ кН/м², коефіцієнт Пуассона $\nu = 0,2$, питома густина $\rho = 2,5 \cdot 10^3$ кг/м³; інтенсивність імпульсу $P_0 = 8 \cdot 10^8$ Н, час його дії $\tau = 1 \cdot 10^{-5}$ с.

Для даних одновимірних елементів конструкцій за точні вважалися результати, для яких у [20, 21] балки моделювалися як стержні, і для яких у [20] наведено аналітичні розв'язки.

У роботі моделювання балок виконувалося просторовим універсальним СЕ, який дозволяє розглядати тонкі оболонкові конструкції як тривимірні тіла [1, 2]. Згідно з вихідними даними балка при апроксимації просторовим СЕ умовно відповідає оболонці середньої

товщини, оскільки $h/l = 10^{-1}$, що є верхньою границею можливостей методики.

Виходячи зі складного виду деформування балок [20], за розрахункові приймалися скінченноелементні моделі балки з сітками 2×20 , 2×32 та 2×40 СЕ. При побудові редукованої моделі задачі використовувалося 9, 15 та 19 базисних вузлів. На розрахунковій схемі (рис. 4) для сітки 2×20 СЕ показано вибір опорних точок методу базисних вузлів в площині серединної поверхні $x^2 x^3$.

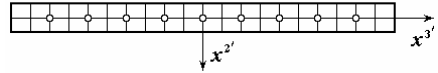


Рис. 4. СЕМО балки (2×20 СЕ) та вибрані базисні вузли

Відслідковувалися компоненти вектора переміщень у центрі балки на заданому часовому інтервалі у вигляді діаграм «амплітуда u^I – час t » (« $u^I - t$ ») та форми деформування у характерні моменти часу. Переміщення u^I є вузловим переміщенням на серединній поверхні балки.

3.1. Розглядаються нестационарні коливання балки (рис. 3) від дії рівномірно розподіленого по її довжині миттєвого імпульсу ${}^t q$ прямокутної форми.

На всіх ділянках діаграми «амплітуда – час» (рис. 5, а) спостерігається гарний збіг розв'язків при усіх сітках. Порівняння діаграми « $u^I - t$ », що отримана за МССЕ, з результатами роботи [21] (рис. 5, б) показує практично повний їх збіг із незначним розходженням у верхній точці. Максимальний прогин $u_{max}^I = -0,1048$ см досягається при $t = 0,0114$ с (рис. 5, а), що гарно збігається з розв'язками, отриманими в [20, 21]. Розбіжність з теоретичним розв'язком $u_{max}^I = -0,1032$ см [20] складає +1,55%, з розрахунком за програмним комплексом Scad [21] $u_{max}^I = -0,102998$ см становить +1,75%.

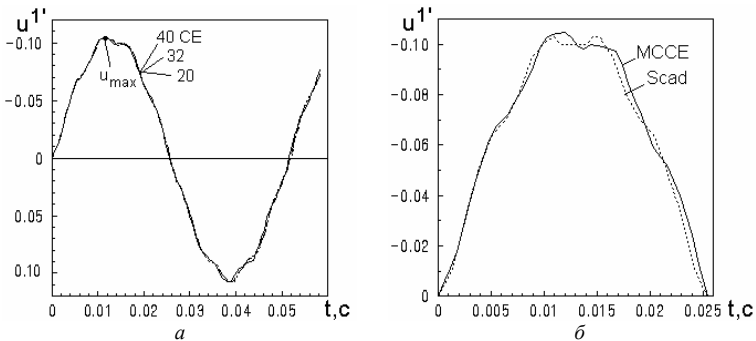


Рис. 5. Діаграми « $u^I - t$ »: (а) для різних сіток СЕ; (б) порівняння з розв'язком [21]

Для обґрунтування збіжності отримуваних розв'язків були проаналізовані для різних сіток епюри прогинів по довжині балки у різні моменти часу.

Маємо гарний збіг розв'язків на інтервалі дії імпульсного навантаження: на середині $t = \tau/2$ (рис. 6, а) та на кінці $t = \tau$ (рис. 6, б) проміжку часу його дії. На цьому проміжку $t \in [0, \tau]$ спостерігається крайовий ефект переміщень балки біля його кінців. Для першої більш рідкої сітки ефект хвильової деформації поширюється майже на всю довжину балки. Як достатню для СЕМО балки можна взяти сітку 2×32 СЕ.

На рис. 6, в наведено епюри прогинів балки в момент часу $t = t_{u_{max}}$, коли амплітуда коливань досягає максимуму u'_{max} (рис. 5, а). Маємо практично повний збіг форм, що отримані за MCSE та Scad [21].

Виконане дослідження підтверджує гарну збіжність і достатньо високу точність розв'язку, що побудований за запропонованою методикою.

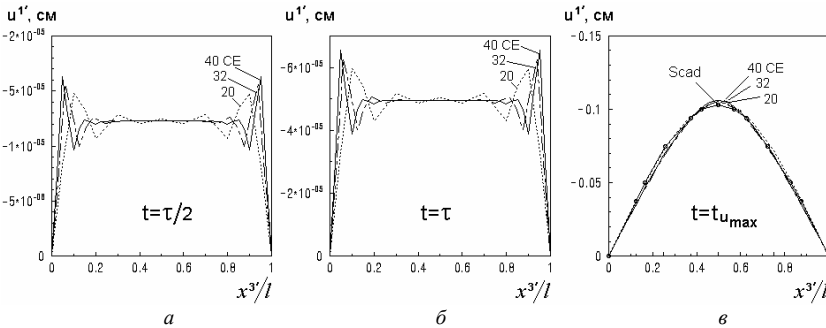


Рис. 6. Епюри прогинів у різні моменти навантаження $t q$

3.2. Розглядається задача про нестационарні коливання балки (рис. 3) від дії зосередженого миттєвого імпульсу $t p$ прямокутної форми, що прикладений в середині її прольоту.

Діаграми « $u' - t$ », що відповідають випадку дії зосередженого імпульсу (рис. 7, а), мають більш складний вигляд, ніж при дії рівномірно розподіленого. Маємо досить гарний збіг розв'язків для усіх сіток.

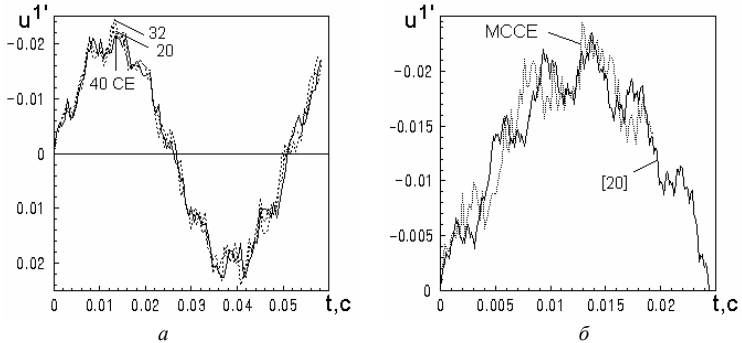


Рис. 7. Діаграми « $u' - t$ »: (а) для різних сіток СЕ; (б) порівняння з розв'язком [20]

Порівняння діаграми «амплітуда – час», що отримана з використанням МССЕ, з результатами роботи [20] (рис. 7, б) показує задовільний збіг розв'язків. Максимальний прогин $u'_{max} = -0,02143$ см досягається при $t = 0,0132$ с (рис. 7, а), що узгоджується з розв'язком $u'_{max} = -0,02468$ см, отриманим аналітично в [20]. Розбіжність розв'язків складає -13,17%. Незначну розбіжність діаграм можна віднести до особливостей застосування уточненої методики МССЕ [1, 2], що використовує просторові скінченні елементи і розглядає балку як тривимірне тіло, у той час, коли в [20] балка розглядалась як стержень.

Аналіз форм деформування балки для різних сіток показав гарний збіг розв'язків у різні моменти часу (рис. 8). На проміжку $t \in [0, \tau]$ дії імпульсного навантаження в точках $t = \tau/2$ (рис. 8, а) та $t = \tau$ (рис. 8, б) спостерігається деформування балки в центральній частині в районі дії імпульсу. Як і в попередньому випадку маємо гарний збіг розв'язків для СЕМО балки з сітками 2×32 СЕ та 2×40 СЕ. Для моменту часу $t = t_{u_{max}}$, коли амплітуда коливань балки досягає максимуму u'_{max} , форма деформування набуває більш простого вигляду (рис. 8, в). При згущенні сітки 2×40 СЕ епюра характеризується незначними хвилями. Порівняння епюр з результатами роботи [20] показало гарний збіг розв'язків. Більш ускладнений вигляд епюри, яка отримана за МССЕ, можна пояснити використанням просторового СЕ [1, 2] для апроксимації балки. Для цього випадку навантаження за достатню можна прийняти сітку 2×40 СЕ.

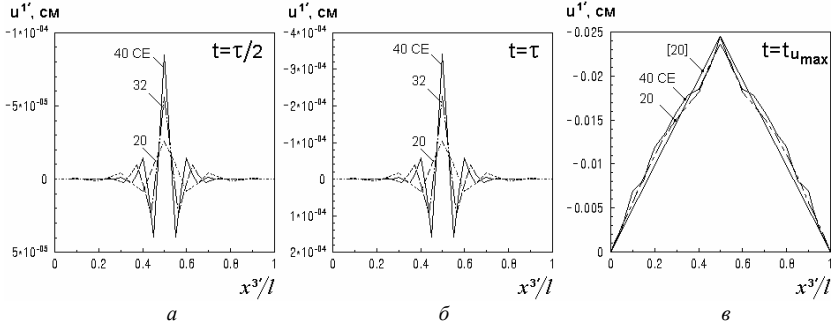


Рис. 8. Епюри прогинів у різні моменти миттєвого навантаження t_p

Наведені результати підтверджують ефективність побудованої методики дослідження нестационарних коливань оболонок неоднорідної структури при дії короткочасних динамічних навантажень.

На тестових задачах продемонстровано, що навіть для CE, який відповідає оболонці середньої товщини, що є верхньою границею можливостей просторового скінченного елемента [1, 2], можливе застосування розробленого методу для оцінки впливу короткочасного навантаження на поведінку тонкостінної конструкції.

Висновки. На основі розробленої авторами скінченноелементної моделі тонкої пружної неоднорідної оболонки та створеної на її базі для задач динаміки редукованої моделі за методом базисних вузлів побудовано алгоритм розв'язання задач про нестационарні коливання оболонок неоднорідної структури при дії короткочасних динамічних навантажень.

Застосування методу базисних вузлів дозволило розробити простий та ефективний алгоритм розв'язування даної задачі. Використання невеликої кількості базисних вузлів при побудові редукованої моделі оболонки забезпечило можливість переходу від зв'язаної системи диференціальних рівнянь, що описує рух системи, до системи незв'язаних рівнянь, розв'язок якої легко знаходиться за добре розробленим чисельним методом Рунге–Кутти.

Розроблений алгоритм застосовано до розрахунку балок сталого поперечного перерізу на дію різних імпульсних навантажень. Проведені дослідження підтверджують гарну збіжність і достатньо високу точність розв'язку, що побудований за запропонованою методикою.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Баженов В.А., Кривенко О.П., Соловей М.О.* Нелинейное деформирование та стійкість пружних оболочок неоднорідної структури. – К.: ЗАТ «Віпол», 2010. – 316 с.
2. *Баженов В.А., Кривенко О.П., Соловей Н.А.* Нелинейное деформирование и устойчивость упругих оболочек неоднородной структуры: Модели, методы, алгоритмы, малоизученные и новые задачи. – М.: Книжный дом «ЛИБРИКОМ», 2013. – 336 с.
3. *Gotsulyak E.A., Sivanov A.G.* Stability and Nonlinear deformation of Cylindrical Grids // International Applied Mechanics, 2004. – Vol. 40, № 4. – Pp. 426-431.
4. *Голованов А.И., Тюленева О.Н., Шигабутдинов А.Ф.* Метод конечных элементов в статике и динамике тонкостенных конструкций. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2006. – 392 с.
5. *Filatov G.V.* Optimal Design of Shells Subjected to Impulsive Loading // International Applied Mechanics. – 2005. – Vol. 41, № 8. – Pp. 917-923
6. *Zarutskii V.A., Lugovoi P.Z., Meish V.F.* Dynamic problems for and stress-strain state of inhomogeneous shell structures under stationary and nonstationary loads // International Applied Mechanic. – 2009. – Vol. 45, № 3. – Pp. 245-271.
7. *Баженов В.А., Кривенко О.П., Легостаев А.Д.* Стійкість і власні коливання неоднорідних оболонок з урахуванням напруженого стану // Опір матеріалів і теорія споруд: наук.-тех. збірн. – К.: КНУБА, 2015. – Вип. 95. – С.96-113.
8. *Чибіряков В.К., Легостаев А.Д., Гречух Н.А., Яковенко О.О.* Методика дослідження оболонок від дії нестационарних динамічних впливів з використанням редукованих моделей // Опір матеріалів і теорія споруд: наук.-тех. збірн. – К.: КНУБА, 2015. – Вип. 96. – С. 36-47.
9. *Кривенко О.П., Легостаев А.Д., Гречух Н.А.* Аналіз власних коливань оболонок неоднорідної структури з використанням редукованих скінченноелементних моделей // Опір матеріалів і теорія споруд: наук.-тех. збірн. – К.: КНУБА, 2017. – Вип. 98. – С. 72-88.
10. *Хайрнасов К.З.* Моделирование поведения кольцевой пластинки при импульсном нагружении // Горный информационно-аналитический бюллетень (научно-технический журнал), Москва: "Горная книга", 2009. – №7. – С. 52-63.
11. Идентификация нагрузок при импульсном деформировании тел. Монография. В 2-х частях. Часть 1 / *Е.Г.Янютин, Д.И.Богдан, Н.И.Воропай, Г.А.Гнатенко, В.Т.Гришакин.* – Харьков: Изд-во ХНАДУ, 2010. – 180 с.
12. *Шульженко Н.Г., Гонтаровский П.П.* Реакция оболочечных элементов космических аппаратов на импульсное воздействие // Авиационно-космическая техника и технология, 2013, № 9 (106) – С. 53-58.
13. *Бахтиева Л.У., Тазюков Ф.Х.* Решение задачи устойчивости тонкой оболочки при импульсном нагружении // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. Науки. – 2014. – Том 156, книга 1. – С. 5–11.
14. *Чернобрыво М.В., Светличная С.Д., Комяк В.М.* Моделирование динамических деформационных процессов в защитных контейнерах при детонационном воздействии // Проблемы надзвичайних ситуацій. – 2014. – Вип. 19. – С. 162-169.
15. *Лаврентьев М. А., Ишлинский А.Ю.* Динамические формы потери устойчивости упругих систем // Докл. АН СССР. – 1949. – 64, №6. – С. 779–782.
16. Справочник по динамике сооружений / Под ред. Б.Г.Коренева, И.М.Рабиновича. – М.: Стройиздат, 1972. – 511 с.
17. *Кислюк В.Н., Легостаев А.Д.* Реализация метода конечных элементов в задачах исследования свободных колебаний оболочек и пластин // Опір матеріалів і теорія споруд, – Київ: Будівельник, 1974. – Вип. 27. – С. 24-32.
18. *Баженов В.А., Кривенко О.П., Соловей М.О.* Матрица мас модифікованого просторового скінченного елемента неоднорідної оболонки // Опір матеріалів і теорія споруд: наук.-тех. збірн. – К.: КНУБА, 2013. – Вип. 91. – С. 114-125.
19. *Баженов В.А., Ворона Ю.В.* Будівельна механіка. Динаміка: Підручник. – К.: Каравела, 2014. – 288 с.

20. Рабинович И.М., Синицын А.П., Лужин О.В., Теренин Б.М. Расчет сооружений на импульсивные воздействия. – М.: Из-во по строительству, 1970. – 303 с.
21. ScadSoft: Свободно опертая балка с распределенной массой под действием равномерно распределенного мгновенного импульса (удар балки о неподвижные опоры) [Электронный ресурс]. – Режим доступа: http://scadsoft.com/tests_scad/index/test/68

REFERENCES

1. *Bazhenov V.A., Kryvenko O.P., Solovei M.O.* Nelineine deformuvannia ta stiikist pruzhnykh obolonok neodnorodnoi struktury (Nonlinear deformation and stability of elastic shells with inhomogeneous structure). – К.: ZAT «Vipol», 2010. – 316 s.
2. *Bazhenov V.A., Krivenko O.P., Solovey N.A.* Nelineynoe deformirovanie i ustoychivost uprugih obolochek neodnorodnoy struktury: Modeli, metody, algoritmy, maloizuchennyye i novyye zadachi (Nonlinear deformation and stability of elastic shells with inhomogeneous structures: Models, methods, algorithms, poorly-studied and new problems). – М.: Knizhnyy dom «LIBRIKOM», 2013. – 336 s.
3. *Gotsulyak E.A., Sivanov A.G.* Stability and Nonlinear deformation of Cylindrical Grids // International Applied Mechanics, 2004. – Vol. 40, № 4. – Pp. 426-431.
4. *Golovanov A.I., Tyuleneva O.N., Shigabudinov A.F.* Metod konechnykh elementov v statike i dinamike tonkostennykh konstruktсий (Finite element method in statics and dynamics of thin-walled structures). – М.: FIZMATLIT, 2006. - 392 s.
5. *Filatov G.V.* Optimal Design of Shells Subjected to Impulsive Loading // International Applied Mechanics. – 2005. – Vol. 41, № 8. – Pp. 917-923
6. *Zarutskii V.A., Lugovoi P.Z., Meish V.F.* Dynamic problems for and stress-strain state of inhomogeneous shell structures under stationary and nonstationary loads // International Applied Mechanic. – 2009. – Vol. 45, № 3. – Pp. 245-271.
7. *Bazhenov V.A., Kryvenko O.P., Lehostaiev A.D.* Stiikist i vlasni kolyvannia neodnorodnykh obolonok z urakhuvanniam napruzhenoho stanu (Stability and natural vibrations of inhomogeneous shells taking into account the stress state) // Opir materialiv i teoriia sporud: nauk.-tekh. zbirn. – К.: KNUBA, 2015. – Vyp. 95. – S.96-113.
8. *Chybirakov V.K., Lehostaiev A.D., Hrechukh N.A., Yakovenko O.O.* Metodyka doslidzhennia obolonok vid dii nestatsionarnykh dynamichnykh vplyviv z vykorystanniam redukovanykh modelei (The method of research of the shells at the action of non-stationary dynamic loads using reduced models) // Opir materialiv i teoriia sporud: nauk.-tekh. zbirn. – К.: KNUBA, 2015. – Vyp. 96. – S. 36-47.
9. *Kryvenko O.P., Lehostaiev A.D., Hrechukh N.A.* Analiz vlasnykh kolyvan obolonok neodnorodnoi struktury z vykorystanniam redukovanykh skinchennoelementnykh modelei (Analysis of natural vibrations of shells with inhomogeneous structure using reduced finite element models) // Opir materialiv i teoriia sporud: nauk.-tekh. zbirn. – К.: KNUBA, 2017. – Vyp. 98. – S. 72-88.
10. *Hayrnasov K.Z.* Modelirovanie povedeniya koltsevoy plastinki pri impulsnom nagruzenii (Simulation of the behavior of an annular plate under impulse loading) // Gornyy informatsionno-analiticheskiy byulleten (nauchno-tehnicheskii zhurnal), Moskva: "Gornaya kniga", 2009. – №7. – S. 52-63.
11. Identifikatsiya nagruzok pri impulsnom deformirovanii tel. Monografiya. V 2-h chastyah. Chast 1 (Identification of loads during pulsed deformation of bodies. Monograph. in 2 parts. Part 1) / *E.G.Yanyutin, D.I.Bogdan, N.I.Voropay, G.A.Gnatenko, V.T.Grishakin.* – Harkov: Izd-vo HNADU, 2010. – 180 s.
12. *Shulzhenko N.G., Gontarovskiy P.P.* Reaktsiya obolochechnykh elementov kosmicheskikh apparatov na impulsnoe vozdeystvie (The reaction of the shell elements of space vehicles to the impulse action) // Aviatсионно-kosmicheskaya tehnika i tehnologiya, 2013, № 9 (106) – S. 53-58.

13. *Bahtieva L.U., Tazyukov F.H.* Reshenie zadachi ustoychivosti tonkoy obolochki pri impulsnom nagruzhении (Solution of the problem of stability of a thin shell under a pulsed loading) // Uchen. zap. Kazan. un-ta. Ser. Fiz.-matem. Nauki. – 2014. – Tom 156, kniga 1. – S. 5–11.
14. *Chernobryivko M.V., Svetlichnaya S.D., Komyak V.M.* Modelirovaniye dinamicheskikh deformatsionnykh protsessov v zaschitnykh konteynerakh pri detonatsionnom vozdeystvii (Modeling of dynamic deformation processes in protective containers under detonation action) // Problemi nadzvichaynykh situatsiy. – 2014. – Vip. 19. – S. 162-169.
15. *Lavrentev M. A., Ishlinskiy A.Yu.* Dinamicheskie formy poteri ustoychivosti uprugih system (Dynamic forms of loss of stability of elastic systems) // Dokl. AN SSSR. – 1949. – 64, №6. – S. 779–782.
16. Spravochnik po dinamike sooruzheniy (Handbook of the dynamics of structures) / Pod red. *B.G.Koreneva, I.M.Rabinovicha.* – M.: Stroyizdat, 1972. – 511 s.
17. *Kislokiy V.N., Legostaev A.D.* Realizatsiya metoda konechnykh elementov v zadachah issledovaniya svobodnykh kolebaniy obolochek i plastin (Realization of the finite element method in problems of analysis free vibrations of shells and plates) // Opir materialiv i teoriia sporud, – Kyiv: Budivelnyk, 1974. – Vyp. 27. – S. 24-32.
18. *Bazhenov V.A., Kryvenko O.P., Solovei M.O.* Matrytsia mas modyfikovanoho prostorovoho skinchennoho elementa neodnorodnoi obolonki (Mass matrix of the modified solid finite element for inhomogeneous shells) // Opir materialiv i teoriia sporud: nauk.-tekh. zbirn. – K.: KNUBA, 2013. – Vyp. 91. – C. 114-125.
19. *Bazhenov V.A., Vorona Yu.V.* Budivelna mekhanika. Dynamika: Pidruchnyk (Structural mechanics. Dynamics. Textbook) – K.: Karavela, 2014. – 288 s.
20. *Rabinovich I.M., Sinitsyn A.P., Luzhin O.V., Terenin B.M.* Raschet sooruzheniy na impulsivnyie vozdeystviya (Calculation of constructions at impulsive effects). – M.: Iz-vo po stroitelstvu, 1970. – 303 s.
21. ScadSoft: Svobodno opertaya balka s raspredelennoy massoy pod deystviem ravnomerno raspredelennoho mgnovennogo impulsa (udar balki o nepodvizhnyie opory) (A simply supported beam with a distributed mass under the action of a uniformly distributed instantaneous pulse (impact of a beam on fixed supports) [Elektroniy resurs]. – Rezhim dostupu http://scadsoft.com/tests_scad/index/test/68

Chybiriyakov V.K., Krivenko O.P., Legostaev A.D., Grechukh N.A.

DEFORMATION OF ELASTIC INHOMOGENEOUS SHELLS UNDER THE ACTION OF NONSTATIONARY DYNAMICAL LOADS

An algorithm for investigating the nonstationary vibrations of shells with an inhomogeneous structure under the action of short-term dynamic loads is proposed. The technique is based on the finite element model of a thin elastic shell with various geometric features in terms of thickness and on the reduced model for dynamics problems created on its basis.

The method of investigation of elastic inhomogeneous shells is based on the relations of the 3-d theory of thermoelasticity and the use of the moment finite-element scheme. So, a thin shell is considered, by this method, as a three-dimensional body, which is modeled in thickness by one isoparametric solid finite element with multilinear shape functions. The features of the stress-strain state of a thin inhomogeneous shell are taken into account using two nonclassical hypotheses: that the normal stresses in the fibers are constant throughout the thickness of the shell and the nonclassical kinematic hypothesis of deformed straight line in the thickness direction.

The construction of the reduced finite-element model is performed by using the method of basis nodes. The application of the method of basis nodes made it possible to develop a simple and effective algorithm for studying nonstationary oscillations of inhomogeneous shells under the action of short-term dynamic loads. The use of a small number of basic nodes in the construction of a reduced shell model has provided the possibility of a transition from a coupled system of

differential equations describing the motion of the system to a system of unbound equations, the solution of which is easily found in the well-developed Runge-Kutta numerical method.

The efficiency of the developed algorithm is demonstrated by the example of analysis the hinged beams of constant cross section on the action of various impulse loads. Convergence of solutions is investigated and a comparison with theoretical data and results of calculations obtained with the help of the software Scad is made. The conducted studies confirm the good convergence and rather high accuracy of the solution obtained according to the proposed method.

Keywords: thin elastic shell, universal solid finite element, model reduced, impulse load.

Чиби́ряков В.К., Кривенко О.П., Легостаєв А.Д., Гречух Н.А.

ДЕФОРМИРОВАНИЕ УПРУГИХ НЕОДНОРОДНЫХ ОБОЛОЧЕК ПОД ДЕЙСТВИЕМ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ НАГРУЗОК

Предложен алгоритм исследования нестационарных колебаний оболочек неоднородной структуры при действии кратковременных динамических нагрузок. Методика построена на основе разработанной авторами конечноэлементной модели тонкой упругой оболочки с различными геометрическими особенностями по толщине и созданной на ее базе для задач динамики редуцированной модели. Дано количественное обоснование метода. Выполнено сравнение решений с теоретическими данными и результатами расчетов, полученными в программном комплексе Scad.

Ключевые слова: тонкая упругая оболочка, универсальный пространственный конечный элемент, редуцирована модель, импульсная нагрузка.

УДК 539.3

Чи́бїряков В.К., Кривенко О.П., Легостаєв А.Д., Гречух Н.А. **Деформування пружних неоднорідних оболонок під дією нестационарних динамічних навантажень** / Опір матеріалів і теорія споруд: наук.-тех. збірн. – К.: КНУБА, 2017. – Вип. 99. – С. 123 – 141.

Запропоновано алгоритм дослідження нестационарних коливань оболонок неоднорідної структури при дії короткочасних динамічних навантажень. Методику побудовано на основі розробленої авторами скінченноелементної моделі тонкої пружної оболонки з різними геометричними особливостями за товщиною і створеної на її базі для задач динаміки редукованої моделі. Дано кількісне обґрунтування методу.

Табл. 0. Іл. 8. Бібліогр. 21 назв.

UDC 539.3

Chybiryakov V.K., Krivenko O.P., Legostaev A.D., Grechukh N.A. **Deformation of elastic inhomogeneous shells under the action of nonstationary dynamical loads** / Opir materialiv i teoriia sporud: nauk.-tekh. zbirn. – K.: KNUBA, 2017. – Issue 99. – P. 123 – 141. – Ukr.

An algorithm for investigating the nonstationary vibrations of shells with an inhomogeneous structure under the action of short-term dynamic loads is proposed. The technique is based on the finite element model of a thin elastic shell with various geometric features in terms of thickness and on the reduced model for dynamics problems created on its basis. The quantitative justification of the method is given.

Tabl. 0. Fig. 8. Bibliograf. 21 ref.

УДК 539.3

Чибирияков В.К., Кривенко О.П., Легостаев А.Д., Гречух Н.А. Деформирование упругих неоднородных оболочек под действием нестационарных динамических нагрузок / Сопротивление материалов и теория сооружений: науч.-тех. сборн. – К.: КНУСА, 2017. – Вып. 99. – С. 123 – 141. – Укр.

Предложен алгоритм исследования нестационарных колебаний оболочек неоднородной структуры при действии кратковременных динамических нагрузок. Методика построена на основе разработанной авторами конечноэлементной модели тонкой упругой оболочки с различными геометрическими особенностями по толщине и созданной на ее базе для задач динамики редуцированной модели. Дано количественное обоснование метода.

Табл. 0. Ил. 8. Библиогр. 21 назв.

Автор (вчена ступень, вчене звання, посада):

доктор технічних наук, професор, завідувач кафедри вищої математики КНУБА
ЧИБРИЯКОВ Валерій Кузьмич

Мобільний тел.: +38(097) 925-77-96;

кандидат технічних наук, старший науковий співробітник, провідний науковий співробітник НДІ будівельної механіки КНУБА КРИВЕНКО Ольга Петрівна

Мобільний тел.: +38(066) 048-32-77,

Е-mail: olakor@ukr.net

кандидат технічних наук, доцент, доцент кафедри будівельної механіки КНУБА
ЛЕГОСТАСВ Анатолій Дмитрович

Мобільний тел.: +38(096) 340-59-18,

Е-mail: anat_leg@ukr.net

науковий співробітник НДІ будівельної механіки КНУБА ГРЕЧУХ Наталія Анатоліївна

Мобільний тел.: +38(097) 426-16-09,

Е-mail: natniism@ukr.net

Адреса робоча: 03680 Україна, м. Київ, Повітрофлотський проспект 31, Київський національний університет будівництва і архітектури.

Роб. тел.: +38(044) 245-48-29.